

К идентификации источника энергии, идущей на излучение осциллирующей заряженной каплей акустических и электромагнитных волн

А. И. Григорьев^{a,*}, Н. Ю. Колбнева^{b,**}, С. О. Ширяева^{b,***}

^aИнститут проблем механики им. А.Ю. Иилинского РАН,
г. Москва, 119526, Россия
*e-mail: grigori@mail.ru

^bЯрославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
г. Ярославль, 150000, Россия
**e-mail: kolbneva-nata@yandex.ru
***e-mail: shir@uniyar.ac.ru

Поступила в редакцию 20.06.2024

После доработки 19.11.2024

Принята к публикации 27.11.2024

Обсуждается источник энергии, идущей на генерацию осциллирующей заряженной каплей вязкой жидкости, электромагнитного излучения. Показано, что источником электромагнитного излучения является тепловая энергия, выделяющаяся в капле при ее осцилляциях в силу вязкого рассеяния механической энергии осцилляций.

Ключевые слова: осциллирующая капля, заряд, диссипация механической энергии

УДК 532.59:534.2:537.2

<https://doi.org/10.52577/eom.2024.60.6.39>

ВВЕДЕНИЕ

Как показано в [1, 2], осциллирующая облачная капля или капля дождя, несущая собственный заряд или индуцированные внешним электростатическим полем электрические заряды, способна излучать электромагнитные волны, так как, согласно общей теории [3], электрические заряды, движущиеся с ускорением (что происходит при осцилляциях капли), излучают электромагнитные волны. Из-за осцилляций облачных капель будет иметь место и генерация акустических волн [4].

Теория излучения акустических и электромагнитных волн осциллирующими каплями в последние годы подробно разработана [1, 2, 4, 5], но кое-что описано не полностью. Так, не понятен источник энергии, идущей на генерацию электромагнитных волн. При излучении каплей электромагнитных и акустических волн энергия, запасенная в ней в виде механической энергии капиллярных волн, уменьшается. В самом деле, при излучении ускоренно движущимися зарядами электромагнитных волн уменьшаются скорости движения зарядов, а при излучении акустических волн, передающих механическую энергию молекул воды молекулам окружающего газа, уменьшаются скорости движения молекул воды. Средняя скорость движения молекул той либо иной среды есть мера ее температуры. Другими словами, при излучении электромаг-

нитных и акустических волн осциллирующей каплей ее температура снижается. Очевидно, что энергией, подходящей для восполнения каплей потерь на излучение электромагнитных и акустических волн, является тепловая.

Учтем, что все реальные жидкости обладают вязкостью и при осцилляциях капли часть ее механической энергии превращается в тепло из-за вязкой диссипации. Согласно [6, с. 805–807], декремент η_ν затухания осцилляций n -й моды сферической капли радиусом R (или показатель скорости превращения механической энергии в тепло) определяется выражением:

$$\eta_\nu = \frac{\nu}{R^2} (n-1)(2n+1), \quad (1)$$

где ν – коэффициент кинематической вязкости жидкости.

Чтобы оценить, хватит ли этого количества тепла для поддержания непрерывности электромагнитного и акустического излучения капли, следует найти декременты затухания ее осцилляций вследствие этих излучений.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть имеется уединенная сферическая капля радиусом R идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости с плотностью ρ_1 и коэффициентом межфазного натяжения на границе со средой σ . Примем, что капля обладает зарядом

Q , находится в идеальной сжимаемой диэлектрической среде, характеризующейся плотностью ρ_2 , диэлектрической проницаемостью ϵ_{ex} и скоростью распространения звука ν .

В реальной жидкости в силу теплового движения молекул в капле в ней создается капиллярное волновое движение, приводящее к искажению границы раздела сред и имеющее весьма малую (не превышающую 0,1 нм) амплитуду порядка $|\xi| \sim \sqrt{\kappa T / \sigma}$, где κ – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура [7].

Решение задачи естественно лежит в сферической системе координат (r, θ, φ) , связанной с центром масс капли. Для упрощения дальнейших выкладок рассмотрим осесимметричный случай, пренебрегая зависимостью от азимутальной координаты φ .

Заряд капли Q распределен по ее возмущенной поверхности. Согласно сказанному выше, ускоренное движение заряженной поверхности капли при ее осцилляциях будет приводить к генерации электромагнитных волн. Движение поверхности капли вызовет во внешней среде появление акустической волны.

Уравнение возмущенной поверхности капли запишется в виде:

$$r(\theta, t) = R + \xi(\theta, t),$$

где $|\xi(\theta, t)| \ll R$ – деформация сферической формы, обусловленная капиллярным волновым движением.

Волновые движения внутренней и внешней сред капли будем полагать потенциальными, то есть поле скоростей движения сред внутри и вне капли выразим через потенциалы скоростей:

$$\mathbf{V}_{j1}(r, \theta, t) = \nabla \psi_j(r, \theta, t); \quad (j = 1; 2). \quad (2)$$

Здесь величины, относящиеся к капле, отмечены нижним индексом 1 (то есть $j = 1$), а относящиеся к среде – нижним индексом 2 (то есть $j = 2$). Заметим, что функции $\mathbf{V}_{j1}(r, \theta, t)$, $\psi_j(r, \theta, t)$ имеют тот же порядок малости, что и возмущение $\xi(\theta, t)$.

В принятом приближении идеально проводящей жидкости скорость перераспределения заряда на поверхности капли на много порядков больше гидродинамических скоростей. В виду этого электрическое поле, создаваемое зарядом Q , будем принимать квазистационарным и характеризовать напряженностью поля \mathbf{E} .

Математическая формулировка задачи расчета капиллярных осцилляций несжимаемой заряженной электропроводной капли в

сжимаемой диэлектрической среде и возникающих при этом акустических и электромагнитных излучений, состоит из:

– уравнений Эйлера:

$$\frac{d\mathbf{V}_{j1}(r, \theta, t)}{dt} = -\frac{1}{\rho_j} \nabla P_j(r, \theta, t); \quad (j = 1, 2); \quad (3)$$

– вещественных уравнений непрерывности для полей скоростей:

$$\text{div} \mathbf{V}_{j1}(r, \theta, t) = 0; \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \text{div} \rho_2 \mathbf{V}_{j2}(r, \theta, t) = 0; \quad (4)$$

– волнового уравнения и уравнения непрерывности электрического поля:

$$\Delta \mathbf{L}(r, \theta, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{L}(r, \theta, t)}{\partial t^2} = 0; \quad \text{div} \mathbf{L}(r, \theta, t) = 0. \quad (5)$$

Первое из уравнений (4) после подстановки в него (2) при $j = 1$ сводится к уравнению Лапласа для потенциала поля скоростей течения жидкости в капле $\varphi_1(r, \theta, t)$:

$$\Delta \psi_1(r, \theta, t) = 0; \quad (6)$$

Используя (6), из уравнения (3) найдем выражения для давлений внутри $P_1(r, \theta, t)$ и вне капли $P_2(r, \theta, t)$:

$$P_j(r, \theta, t) = P_{0j} - \rho_j \frac{\partial \psi_j(r, \theta, t)}{\partial t}; \quad (j = 1, 2). \quad (7)$$

В случае сжимаемой внешней среды из второго уравнения (4) и условия (7) при $j = 2$ можно получить волновое уравнение для потенциала поля скоростей $\psi_2(r, \theta, t)$:

$$\frac{1}{\nu^2} \frac{\partial^2 \psi_2(r, \theta, t)}{\partial t^2} - \Delta \psi_2(r, \theta, t) = 0.$$

Граничные условия к (5) и (6) запишем в виде:

$$r \rightarrow 0: \psi_1(r, \theta, t) \rightarrow 0; \quad r \rightarrow \infty: \mathbf{L}(r, \theta, t) \rightarrow 0.$$

Потенциал движения частиц внешней среды $\psi_2(r, \theta, t)$ должен удовлетворять условию излучения Зоммерфельда [8] на бесконечном удалении от поверхности капли (в расходящейся акустической сферической волне, амплитуда которой убывает при $r \rightarrow \infty$):

$$r \rightarrow \infty: \frac{\partial \psi_2(r, \theta, t)}{\partial r} + ik_1 \psi_2(r, \theta, t) = o\left(\frac{1}{r}\right). \quad (8)$$

Кроме того, на границе раздела сред $r = R + \xi(\theta, t)$ потребуем выполнения гидродинамических граничных условий:

$$\frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} \approx \left(\frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} \right); \quad (j = 1, 2); \quad (9)$$

$$P_1(r, \theta, t) - P_2(r, \theta, t) + P_q(r, \theta, t) - P_\sigma(r, \theta, t) = 0;$$

$$P_q(r, \theta, t) = \frac{\varepsilon_{ex}}{8\pi} \left(\frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} \right);$$

$$P_\sigma(r, \theta, t) = \sigma \operatorname{div} \left(\frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} \right)$$

и условия эквипотенциальности поверхности капли:

$$\left(\frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} \right) = 0.$$

Единичный вектор нормали \mathbf{n} к свободной поверхности капли $F(r, \theta, t) = r - R - \xi(\theta, t) = 0$ будем вычислять по формуле $\mathbf{n} = \nabla F / |\nabla F|$, из которой несложно получить:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} \right) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta \quad (10)$$

где $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ – орты сферической системы координат.

Пользуясь (10), перепишем кинематическое граничное условие (9) в виде:

$$r = R + \xi(\theta, t): \quad \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} = \frac{\partial \psi_j(r, \theta, t)}{\partial r}; \quad (j = 1, 2).$$

Также учтем условия неизменности при осцилляциях объема капли, неподвижности ее центра масс и постоянства заряда капли:

$$\int_V r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3;$$

$$\int_V \left(\frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} \right) d\theta d\varphi = 0;$$

$$V = [0 \leq r \leq R + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi];$$

$$\frac{\varepsilon_{ex}}{4\pi} \left(\frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} \right) dS = Q;$$

$$S = [r = R + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi]. \quad (11)$$

Отметим, что условия (11) накладывают ограничения снизу на спектр колебательных мод осциллирующей капли, участвующих в формировании искажения равновесной сферической формы.

В (8)–(11) \mathbf{n} – единичный вектор касательной к свободной поверхности; O и o – символы порядка малости [9]; i – мнимая единица;

$k_1 = \frac{\operatorname{Re} \omega_n}{v}$ – волновое число звуковых волн;

ω_n – комплексная частота; n – номер колебательной моды; P_{0j} – постоянные давления в капле ($j = 1$) и среде ($j = 2$); $P_q(r, \theta, t)$ – давление электрического поля собственного заряда на поверхность капли; $P_\sigma(r, \theta, t)$ – давление сил поверхностного натяжения (лапласовское давление) под искаженной капиллярным волновым движением сферической поверхностью капли.

В итоге выписанная система скалярных гидродинамических уравнений с граничными и дополнительными условиями, а также система векторных уравнений для электрического поля с соответствующими граничными условиями дает математическую модель решаемой задачи.

Дальнейшее решение задачи проведем в рамках теории возмущений [9] в линейном приближении по малому параметру ε , определенному как отношение максимальной амплитуды капиллярных осцилляций капли к ее радиусу: $\varepsilon \equiv \max |\xi| / R \ll 1$. Искомые

неизвестные функции $\xi(\theta, t)$, $\psi_j(r, \theta, t)$, $L(r, \theta, t)$ и давления $P_j(r, \theta, t)$, $P_q(r, \theta, t)$, $P_\sigma(r, \theta, t)$ запишем в виде асимптотических разложений с точностью до членов первого порядка малости по ε :

$$\xi(\theta, t) = \xi^{(1)}(\theta, t) + O(\varepsilon^2);$$

$$\psi_j(r, \theta, t) = \psi_j^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2); \quad (j = 1, 2);$$

$$L(r, \theta, t) = L^{(0)}(r, \theta) + L^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2); \quad (12)$$

$$P_j(r, \theta, t) = P_j^{(0)}(r, \theta, t) + P_j^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2);$$

$$P_q(r, \theta, t) = P_q^{(0)}(r, \theta) + P_q^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2);$$

$$P_\sigma(r, \theta, t) = P_\sigma^{(0)}(r, \theta) + P_\sigma^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2).$$

В (12) верхним индексом «0» обозначены величины, относящиеся к равновесному состоянию системы (нулевого порядка по ε), а верхним индексом «1» отмечены величины, вызванные возмущением поверхности капли и имеющие первый порядок малости по ε .

ДИСПЕРСИОННОЕ СООТНОШЕНИЕ И ДЕКРЕМЕНТЫ

Подставляя проекты решений (12) в сформулированную задачу (2)–(8), в первом порядке малости по ε , с учетом ортогональности полиномов Лежандра [10] стандартными

методами [1, 2, 4–7] несложно найти дисперсионное соотношение задачи в виде:

$$\omega_n^2 = \frac{\sigma}{\rho_1 R^3} \frac{n(n-1)(n+2)}{\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} n H_0\right)} \times \quad (13)$$

$$\times \left(1 + \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_{ex}\sigma R^3 (n-1)(n+2)} (G_0 n(n+1) + 2)\right).$$

Пользуясь известным соотношением для сферической функции Бесселя $h_n^{(2)}(z)$, получим:

$$h_n^{(2)}(z) = \frac{1}{z} \exp(-iz) \sum_{m=0}^n i^{m+1} \frac{(2n-m)!}{(n-m)!m!} \frac{1}{(2z)^{n-m}}; \quad z = kr. \quad (14)$$

$$H_0(z_1) = \frac{h_n^{(2)}(z_1)}{z_1 \times \partial_{z_1} (h_n^{(2)}(z_1))} =$$

$$= - \frac{\sum_{m=0}^n \frac{(2n-m)!}{(n-m)!m!} (2iz_1)^m}{\sum_{m=0}^n \frac{(2n-m)!}{(n-m)!m!} 2^m (iz_1)^{m+1} + \sum_{m=0}^n \frac{(2n-m)!(n-m+1)}{(n-m)!m!} (2iz_1)^m};$$

$$G_0(z_2) = \frac{h_n^{(2)}(z_2)}{\partial_{z_2} (z_2 h_n^{(2)}(z_2))} =$$

$$= - \frac{\sum_{m=0}^n \frac{(2n-m)!}{(n-m)!m!} (2iz_2)^m}{\sum_{m=0}^n \frac{(2n-m)!}{(n-m)!m!} 2^m (iz_2)^{m+1} + \sum_{m=0}^n \frac{(2n-m)!(n-m)}{(n-m)!m!} (2iz_2)^m}; \quad (15)$$

При условии $z_1 = z_{01} = k_1 R \ll 1$, $z_2 = z_{02} = k_2 R \ll 1$ функции (14), (15) примут асимптотический вид:

$$H_0 \approx -\frac{1}{n+1} + i \left(\frac{2^n n!}{(2n)!(n+1)} \right)^2 z_{01}^{2n+1};$$

$$G_0 \approx -\frac{1}{n} + i \left(\frac{2^n (n-1)!}{(2n)!} \right)^2 z_{02}^{2n+1}. \quad (16)$$

При записи уравнения (13) учитывается, что комплексная частота ω_n выражается соотношением: $\omega_n = \text{Re } \omega_n + i \text{Im } \omega_n$, в котором вещественная часть $\text{Re } \omega_n$ дает собственную частоту осцилляций капли, а мнимая часть $\text{Im } \omega_n$ в рамках модели идеальной жидкости характеризует декремент затухания, обусловленный потерей энергии капиллярных осцилляций капли на излучение звуковых и электромагнитных волн.

В случае $\text{Im } \omega_n \ll \text{Re } \omega_n$ левая часть дисперсионного уравнения (13) принимает вид: $\omega_n^2 \approx (\text{Re } \omega_n)^2 + 2i \text{Re } \omega_n \text{Im } \omega_n$. После подстановки в него асимптотических выражений (16) легко выпишем решение:

$$(\text{Re } \omega_n)^2 = \omega_n^2 = \frac{\sigma}{\rho_1 R^3} \frac{n(n-1)(n+2)}{\left(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{n}{n+1}\right)} \left(1 - \frac{W}{(n+2)}\right); \quad (17)$$

$$\text{Im } \omega_n = \frac{\sigma}{\rho_1 R^3} \frac{n(n-1)(n+2)}{\left(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{n}{n+1}\right)^2} \times \quad (18)$$

$$\times \left\{ \frac{\rho_2}{\rho_1} n \left(\frac{2^n n!}{(2n)!(n+1)} \right)^2 \left(1 - \frac{W}{(n+2)}\right) z_{01}^{2n+1} + \right.$$

$$\left. + \frac{W}{\left(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{n}{n+1}\right)} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n-1)} \left(\frac{2^n (n-1)!}{(2n)!} \right)^2 \left(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{n}{n+1}\right) z_{02}^{2n+1} \right\} \frac{1}{2\text{Re } \omega_n}.$$

Здесь величина параметра Рэлея

$$W \equiv \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_{ex}\sigma R^3}$$

характеризует электрогидродинамическую устойчивость проводящей капли по отношению к собственному заряду. Критерий электростатической устойчивости n -й моды осциллирующей капли имеет вид $W < (n+2)$ [12].

Подставим (17) в (18) и, учитывая, что $z_{01} \equiv k_1 R$, $z_{02} \equiv k_2 R$, получим декремент затухания η_1 , характеризующий скорость затухания капиллярного волнового движения из-за излучения акустических волн:

$$\eta_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{2^n n!}{(2n)!(n+1)} \right)^2 \times$$

$$\times \frac{\sigma^{n+1}}{R^{n+2} \nu^{2n+1} \rho_1^{n+1}} \times \quad (19)$$

$$\times \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{n^{n+2} ((n-1)(n+2))^{n+1}}{\left(1 + \frac{n}{n+1} \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{(n+2)}} \left(1 - \frac{W}{(n+2)}\right)^{n+1}$$

и декремент затухания η_2 , характеризующий скорость затухания капиллярного волнового движения из-за излучения электромагнитных волн:

$$\eta_2 = W \frac{1}{2} \left(\frac{2^n (n-1)!}{(2n)!} \right)^2 \times$$

$$\times \frac{\sigma^{n+1}}{R^{n+2} c^{2n+1} \rho_1^{n+1}} \times \quad (20)$$

$$\times \frac{n^{n+1} ((n-1)(n+2))^n (n+1)}{\left(1 + \frac{n}{n+1} \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{(n+1)}} \left(1 - \frac{W}{(n+2)}\right)^n.$$

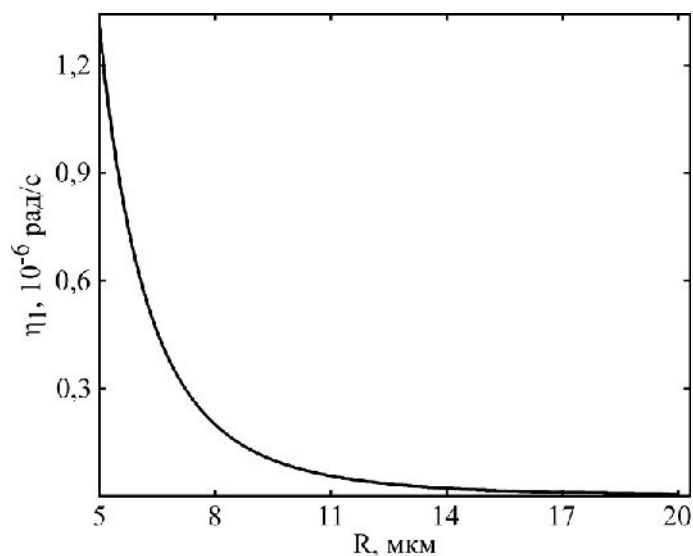


Рис. 1. Зависимость декремента затухания η_1 , определяемого энергопотерями на акустическое излучение облачной капли с зарядом $Q = 5 \times 10^{-6}$ СГСЭ, осциллирующей в материальной среде, от радиуса R . Расчеты проведены при $n = 2$, $\varepsilon_{ex} = 1$, $\sigma = 73$ дин/см, $\rho_1 = 1$ г/см³, $\rho_2 = 1,3 \times 10^{-3}$ г/м³, $\nu = 3,3 \times 10^4$ см/с.

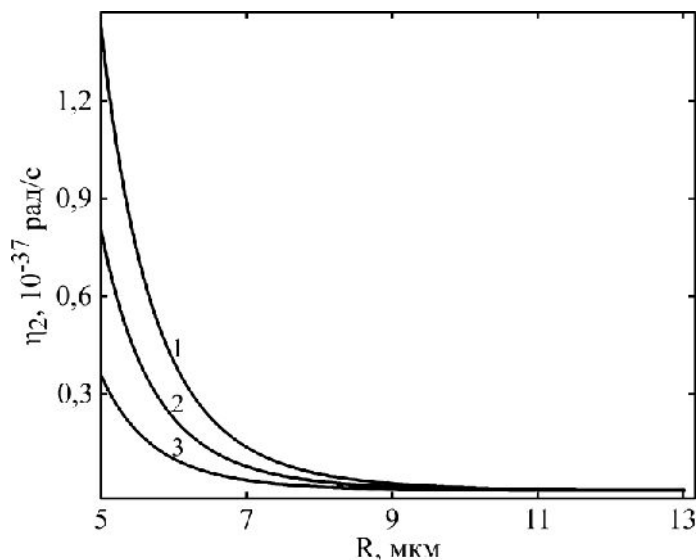


Рис. 2. Зависимость декремента затухания η_2 , определяемого энергопотерями на электромагнитное излучение заряженной облачной капли, от радиуса R . Рассчитано при тех же прочих значениях физических величин, что на [рис. 1](#). Кривая 1 соответствует $Q = 3 \times 10^{-6}$ СГСЭ, кривая 2 – $Q = 4,5 \times 10^{-6}$ СГСЭ, кривая 3 – $Q = 6 \times 10^{-6}$ СГСЭ.

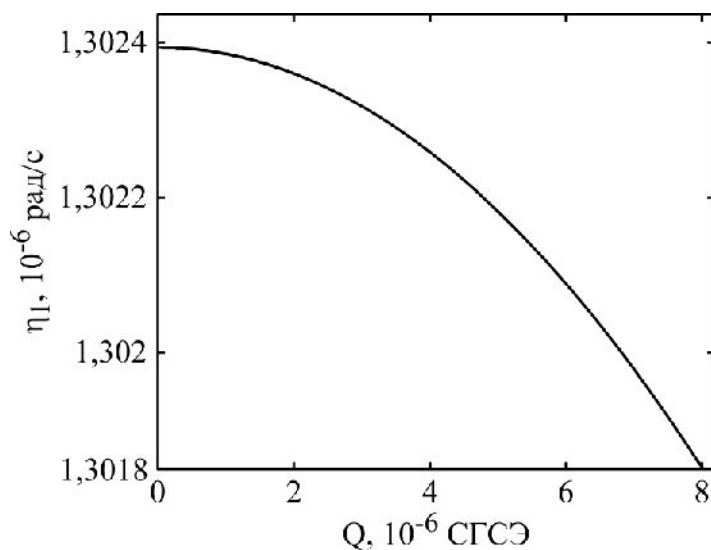


Рис. 3. Зависимость декремента затухания η_1 , определяемого энергопотерями на акустическое излучение заряженной облачной капли радиуса $R = 5$ мкм, осциллирующей в материальной среде, от величины заряда Q . Расчеты проведены при тех же значениях физических величин, что на [рис. 1](#).

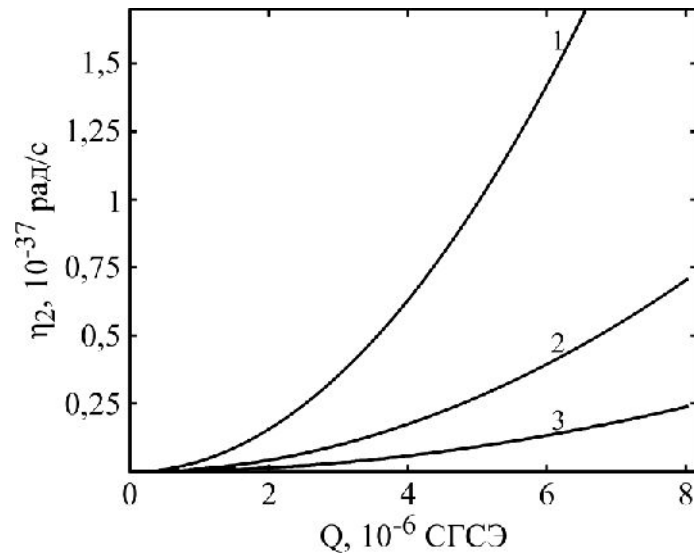
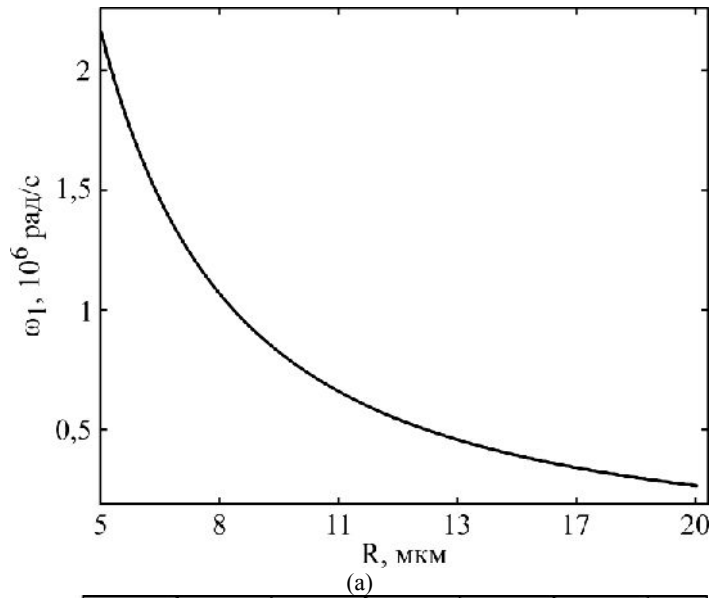
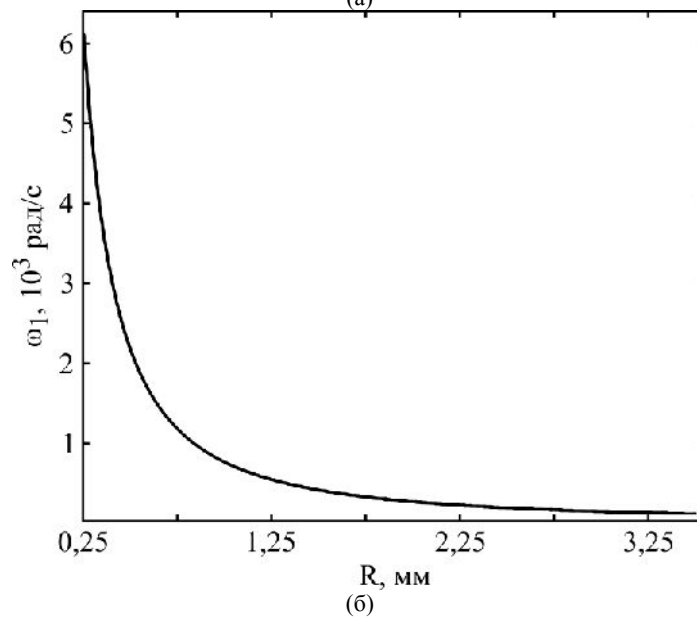


Рис. 4. Зависимость декремента затухания η_2 , характеризующего потери энергии капли на излучение электромагнитных волн, от величины заряда Q осциллирующей облачной капли, рассчитанная при тех же значениях физических величин, что на рис. 1. Кривая 1 соответствует $R = 5$ мкм, кривая 2 – $R = 6$ мкм, кривая 3 – $R = 7$ мкм.



(a)



(б)

Рис. 5. Зависимость от радиуса R частоты акустического ω_1 (или электромагнитного ω_2) излучения (а) облачной капли с зарядом $Q = 5 \times 10^{-6}$ СГСЭ, осциллирующей в материальной среде; (б) дождевой капли с зарядом $Q = 6 \times 10^{-4}$ СГСЭ. Расчеты проведены при тех же значениях физических величин, что на рис. 1.

Сравнивая (19) и (20), несложно сразу заметить, что декремент затухания, связанный с излучением акустических волн, больше декремента затухания, связанного с излучением электромагнитных волн, в $(c/v)^{2n+1}$ раз. Это подтверждается и численными расчетами. Что касается численных значений искомых физических величин, то о них можно судить по графикам, рассчитанным по найденным аналитическим выражениям (17)–(20) при характерных для конвективного облака размерах и зарядах капель [13], а также для дождевых капель [14, с. 443]: рис. 1–5.

Из рис. 1–4 легко видеть, что декремент затухания η_1 , связанный с акустическим излучением, на много порядков величины превышает η_2 – декремент затухания, связанный с электромагнитным излучением. Из рис. 5 следует, что частота излучаемых волн измеряется сотнями герц для дождевых капель и сотнями килогерц для облачных. Нужно отметить, что частота излучаемых волн, как акустических, так и электромагнитных, определяется частотой осцилляций капли, а именно выражением (17).

БАЛАНС ЭНЕРГИИ МЕЖДУ ДИССИПИРУЕМОЙ В КАПЛЕ В ВИДЕ ТЕПЛА ИЗ-ЗА НАЛИЧИЯ ВЯЗКОСТИ ЭНЕРГИЕЙ АКУСТИЧЕСКОГО И ЭЛЕКТРО- МАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЙ И ИДУЩЕЙ НА ТЕПЛООБМЕН СО СРЕДОЙ

Прежде всего отметим, что для намечаемой качественной оценки сначала необходимо оценить количество диссипируемой из-за вязкости жидкости энергии. Как видно из (1), эта энергия пропорциональна коэффициенту кинематической вязкости ν и обратно пропорциональна квадрату радиуса капли R . Легко заметить, что при $\nu = 0,01 \text{ см}^2/\text{с}$ и $R = 0,35 \text{ см}$ для величины декремента получим: $\eta_\nu \approx 0,12 \text{ с}^{-1}$, что на пять порядков величины превышает η_1 и на тридцать шесть порядков η_2 .

Таким образом, тепловыделение в дождевой капле во много раз превышает ее энергопотери на излучение акустических и электромагнитных волн и непрерывность излучения будет обеспечена. Тепло, оставшееся после учета потерь на излучение, будет уходить на нагревание капли и среды.

Пренебрегая электрической энергией слабо заряженной капли, можно выписать аналитическое выражение для полного количества энергии W осциллирующей сферической капли [15], равной сумме ее потенциальной и кинетической энергии.

Учтем, что σ – коэффициент поверхностного натяжения, и, отсчитывая потенциальную энергию сил поверхностного натяжения от потенциальной энергии капиллярных сил равновесной сферы, получим для нее выражение [15]:

$$W_\sigma = 2\pi\sigma \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)(n+2)(2n+1)^{-1} a_n^2.$$

Таким образом, потенциальная энергия сил поверхностного натяжения W_σ получилась в виде однородной квадратичной функции от амплитуд капиллярных волн a_n . Если представить кинетическую энергию осциллирующей капли W_ν в таком же виде, то можно будет принять a_n за обобщенные координаты.

Так как проводящая жидкость, составляющая каплю, предполагается однородной, невязкой и несжимаемой, то движение жидкости в капле будем считать потенциальным. Введем потенциал скоростей волнового движения:

$$\Psi(r, \theta) = P_0 + \sum_{n=2}^{\infty} \beta_n \times r^n \times P_n(\mu),$$

где $P_n(\mu)$ – полином Лежандра [10]; P_0 – полином Лежандра нулевого порядка; коэффициенты β_n неизвестны и будут найдены из кинематического граничного условия (9) на поверхности капли. В итоге кинетическая энергия движущейся жидкости в капле определится выражением [15]:

$$W_\nu = \frac{\rho}{2} \int_V U^2 \times dV = \frac{\rho}{2} \int_V \nabla \Psi \times \nabla \Psi dV.$$

Поскольку $\nabla(\Psi \times \nabla \Psi) = \nabla \Psi \times \nabla \Psi + \Psi \times \Delta \Psi$ и $\Delta \Psi = 0$, то, пользуясь формулой Грина [16], можно записать:

$$\begin{aligned} W_\nu &= \frac{\rho}{2} \int_V \nabla \Psi \times \nabla \Psi dV = \\ &= \frac{\rho}{2} \iint \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial r} a^2 d\varphi d\mu = \\ &= 2\pi a^2 \rho \sum_n a_n^{2n-1} \times \beta_n^2 \times (2n+1)^{-1}. \end{aligned}$$

Скорость движения поверхности в направлении радиус-вектора $\partial \Psi / \partial t$ можно вычислить в качественном отношении, используя кинематическое граничное условие (9), выписанное в линейном по амплитудам мод осцилляций приближении. Приравнивая коэффициенты при полиномах одного порядка, найдем: $\frac{\partial a_n}{\partial t} = n \times \beta_n \times a^{n-1}$. Следовательно:

$$W_\nu = 2\pi \times a^3 \times \rho \sum_n (2n+1)^{-1} \left(\frac{\partial a_n}{\partial t} \right)^2.$$

В итоге будем иметь:

$$W = W_\sigma + W_\nu = 2\pi \left\{ \sum_n \left[\frac{(n-1)(n+2)}{(2n+1)} \sigma a_n^2 + \frac{\rho a^3}{(2n+1)} \left(\frac{\partial a_n}{\partial t} \right)^2 \right] \right\}. \quad (21)$$

Оценим численно по (21) количество энергии для $n = 2$, принимая во внимание, что именно основная мода осцилляций капли возбуждается и в осадках, и в облаке [17, 18]. Примем для оценки $\sigma = 73$ дин/см, $\rho_1 = 1$ г/см³, $a \approx R = 20$ мкм. Чтобы оценить скорость капиллярных волн, выражение (17) для частоты осцилляций капли умножим на радиус капли, получим скорость движения поверхности капли по порядку величины: $\frac{\partial a_n}{\partial t}$. В итоге оценим полную энергию, выделяющуюся за секунду в осциллирующей капле по порядку величины: $\Delta W = \Delta Q \sim 10^{-3}$ эрг. Это соответствует, согласно простому соотношению: $\Delta Q = mc \Delta T$, увеличению температуры капли на $\Delta T \sim 2 \times 10^{-4}$ град если теплоемкость воды c принять равной примерно $c \approx 4 \times 10^7$ эрг/г·град [19, с. 504].

Согласно закону Фурье, количество тепловой энергии, проходящей через элементарную площадку ds за интервал времени dt , от капли определится выражением [20]:

$$dq = -\frac{\gamma dT}{dn} ds dt,$$

где γ – коэффициент теплопроводности среды; dn – бесконечно малое приращение вектора внешней нормали к невозмущенной поверхности капли; dT – приращение температуры среды, соответствующее смещению на dn ; ds – элемент площади поверхности. Полное количество тепла, отдаваемого среде каплей в единицу времени, запишется в виде:

$$Q = -4\pi R^2 \gamma \frac{dT}{dn}. \quad (22)$$

В стационарных условиях величина Q должна примерно (не принимая во внимание весьма энергопотери на излучение) равняться количеству тепла, выделяющегося в капле вследствие диссипации энергии из-за вязкости, то есть должно быть $\approx 10^{-3}$ эрг. Для оценки примем:

$$\frac{dT}{dn} \approx \frac{\Delta T}{\Delta n}, \quad (23)$$

и из (22) с учетом (23) найдем разницу температур капли и среды ΔT , при которой такой отток тепла из капли имеет место:

$$\Delta T = \frac{Q}{4\pi R^2 \gamma}$$

Величину Δn (расстояние по нормали) примем из общефизических соображений как длину свободного пробега молекулы в воздухе при атмосферном давлении $\Delta n \sim 10^{-5}$ см (пренебрегая длиной свободного пробега молекулы в воде). Тогда, принимая $\gamma \sim 2,5 \times 10^3$ эрг/см·сек·град [21, 22, с. 359], найдем: $\Delta T \sim 10^{-3}$ д. Таким образом, чтобы отвести избыток тепла от капли в среду нужна весьма малая разность температур между каплей и средой. Тепло в капле вследствие диссипации энергии из-за осцилляций не будет накапливаться.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссипация механической энергии капли вследствие капиллярных ее осцилляций из-за вязкости жидкости обеспечивает восполнение энергии, идущей на акустическое и электромагнитное излучение. Доля энергии, идущей на излучение, на много порядков величины меньше общей энергии осцилляций, диссипируемой из-за вязкости, избыток которой в виде тепла уходит в окружающую среду вследствие теплообмена. Разность температур капли и среды, обеспечивающая отток тепла от капли, измеряется миллионными долями градуса.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена в ИПМех РАН в рамках Государственного задания № 124012500442-3.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Калечиц, В.И., Нахутин, И.Е., Полуэктов, П.П., О возможном механизме радиоизлучения конвективных облаков, *ДАН СССР*, 1982, т. 262, № 6, с. 1344.
2. Григорьев, А.И., Ширяева, С.О., Колбнева, Н.Ю., *Электромагнитное излучение капли, осциллирующей в грозном облаке*. Москва – Берлин: Изд. Директ-Медиа, 2021. 220 с.
3. Ландау, Л.Д., Лифшиц, Е.М., *Теория поля*. М.: Наука, 1973. 504 с.
4. Григорьев, А.И., Гаилов, А.Р., Об излучении звука при осцилляциях заряженной капли, *ЖТФ*, 2001, т. 71, № 11, с. 6.
5. Григорьев, А.И., Колбнева, Н.Ю., Ширяева, С.О., Об акустическом и электромагнитном излучениях осциллирующей в материальной среде заряженной капли, *Известия РАН. Сер. ФАО*, 2023, т. 59, № 3, с. 352. <https://doi.org/10.31857/S0002351523030045>
6. Ламб, Г., *Гидродинамика*. М.-Л.: ОГИЗ-Гостехиздат, 1947. 928 с.

7. Френкель, Я.И., К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме, *ЖЭТФ*, 1936, т. 6, № 4, с. 348.
8. Лепендин, Л.Ф., *Акустика*. М.: Высшая школа, 1978. 448 с.
9. Найфе, А.Х., *Введение в методы возмущений*. М.: Мир, 1984. 535 с.
10. Варшалович, Д.А., Москалев, А.Н., Херсонский, В.К., *Квантовая теория углового момента*. Л.: Наука. 1975. 436 с.
11. Абрамовиц, М., Стиган И., *Справочник по специальным функциям*. М.: Наука, 1979. 830 с.
12. Rayleigh (Strutt J.W.), On the equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity, *Phil. Mag.* 1882, vol. 14, p. 184.
13. Мазин, И.П., Хргиан, А.Х., Имянитов, И.М., *Облака и облачная атмосфера*. Справочник. Л.: Гидрометеиздат. 1989. 647 с.
14. Тверской, П.Н., *Курс метеорологии. Физика атмосферы*. Л.: Гидрометеиздат, 1962. 700 с.
15. Hendrics, C.D. and Schneider, J.M., Stability of conducting droplet under the influence of surface tension and electrostatic forces, *J. Amer. Phys.*, 1963, vol. 1, № 6, p. 450.
16. Краснов, М.Л., Киселев, А.И., Макаренко, Г.И., *Векторный анализ*. М.: Наука, 1978. 158 с.
17. Стерлядкин, В.В., Натурные измерения колебаний капель осадков, *Изв. АН СССР. Сер. ФАО*, 1988, т. 24, № 6, с. 613.
18. Beard, K.V. and Tokay, A., A field study of small raindrop oscillations, *Geophys. Res. Lett.*, 1991, vol. 18, № 12, p. 2257.
19. *Краткий справочник по химии*. Киев: Наукова думка, 1965. 836 с.
20. Карташов, Э.М., *Аналитические методы в теплопроводности твердых тел*. М.: Высшая школа, 1979. 415 с.
21. *Физические величины. Справочник*. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.
22. Ландау, Л.Д., Ахиезер, А.И., Лифшиц, Е.М., *Курс общей физики. Механика и молекулярная физика*. М.: Наука, 1969. 400 с.

Summary

The source of energy for the generation of electromagnetic radiation by an oscillating charged drop of viscous liquid is discussed. It is shown that the source of electromagnetic radiation is the thermal energy released in the drop during its oscillations due to viscous dissipation of the mechanical energy of oscillations.

Keywords: oscillating drop, charge, dissipation of mechanical energy