

# Об особенностях реализации электростатической неустойчивости заряженной поверхности жидкости в различных геометриях

А. И. Григорьев\*, С. О. Ширяева\*\*

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
г. Ярославль, 150000, Россия, \*e-mail: [grig@uniyar.ac.ru](mailto:grig@uniyar.ac.ru), \*\*e-mail: [shir@uniyar.ac.ru](mailto:shir@uniyar.ac.ru)

Поступила в редакцию 15.09.2020

После доработки 02.10.2020

Принята к публикации 05.10.2020

Рассмотрены особенности реализации электростатической неустойчивости заряженной поверхности жидкости на вершинах заряженной капли, незаряженной капли во внешнем электростатическом поле, цилиндрической струи и плоской поверхности. Отмечено, что критические значения поверхностной плотности электрического заряда на пороге реализации неустойчивости для рассмотренных объектов различны по величине, несмотря на феноменологическое сходство. Причина, по-видимому, состоит в различии (в рассмотренных ситуациях) пространственного изменения напряженности электростатического поля в окрестности, растущего (при реализации неустойчивости заряженной поверхности жидкости) эмиссионного выступа. Обсуждены равновесные и неравновесные формы капель, струй, плоскостей и их симметрия.

*Ключевые слова:* капля сферическая, капля сфероидальная, плоскость, струя, поверхностная плотность заряда

УДК 532.5:537.2

<https://doi.org/10.52577/eom.2021.57.4.15>

## ВВЕДЕНИЕ

Говоря о различных видах электрогидродинамических неустойчивостей заряженной поверхности жидкости, мы имеем в виду неустойчивости сильно заряженной капли проводящей жидкости по отношению к собственному заряду, незаряженной капли во внешнем электростатическом поле (неустойчивость такой капли по отношению к поляризационному заряду) и неустойчивость плоской поверхности проводящей жидкости по отношению к перпендикулярному ее свободной поверхности электростатическому полю. Возможны и различные комбинации упомянутых неустойчивостей или смена постоянных электростатических полей на переменные. Во всех случаях на заряженной жидкой поверхности вырастают эмиссионные выступы (конусы Тейлора), и с их вершин выбрасываются струйки заряженных капелек, уносящих избыточный заряд. Другими словами, феноменология реализации электростатической неустойчивости одинакова во всех случаях, но является ли одинаковой поверхностная плотность электрического заряда в месте выброса струй?

## 1. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КАПЕЛЬ И ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

Первой теоретической работой, посвященной электрогидродинамике жидкости, по-видимому,

является работа Рэлея [1]. Накопление данных экспериментальных исследований явления электродиспергирования жидкости велось еще со времен аббата Нолле [2]. Но в основном это были неосознанные, хаотически выполняемые «методом тыка» работы, соответствующие стадии накопления информации [2–4]. В [1] Рэлей строго теоретически вывел уравнение Лагранжа для осцилляций в отсутствие поля тяжести под действием сил поверхностного натяжения сферической заряженной капли идеальной несжимаемой идеально электропроводной жидкости, получил дисперсионное уравнение и нашел критерий реализации неустойчивости такой капли по отношению к собственному заряду в виде:

$$W_n \equiv \frac{Q^2}{4\pi\sigma R^3} \geq (n+2), \quad (1)$$

где  $W_n$  – безразмерный параметр (параметр Рэлея), характеризующий устойчивость  $n$ -й моды осцилляций капли по отношению к собственному заряду;  $Q$  и  $R$  – заряд и радиус капли;  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения жидкости. Но работа [1] была опубликована в слишком кратком изложении, и через несколько десятков лет в [5] ввиду важности понимания деталей вывода пришлось повторить ее подробно. Критические условия всей капли реализуются при наступлении неустойчивости ее основной моды ( $n = 2$ ). Поэтому критическое

значение параметра Рэля обозначают просто  $W$ . В терминах соотношения (1) это обозначение соответствует  $W \equiv W_2$ .

Попытки экспериментальной проверки критерия Рэля (критерия неустойчивости заряженной капли) начались как только позволила приборная база, со второй половины прошлого века [6–9], и продолжают по настоящее время (см., например, [10–12]). В проведенных экспериментах критерий Рэля полностью подтвердился в пределах точности, которая с начала первых испытаний [6] выросла многократно.

То обстоятельство, что Рэлей провел вывод критерия неустойчивости заряженной капли по отношению к собственному заряду в отсутствие поля тяжести, позволило ему в качестве равновесной формы капли брать сферическую, что существенно упрощало выкладки, но ограничивало область применения построенной теории каплями с радиусами, много меньшими капиллярной постоянной жидкости [13], или условиями невесомости.

В начале 20 века Дж. Зелени начал проводить эксперименты по исследованию электрических разрядов с жидкого электрода [14, 15]. Электрический разряд с жидкого электрода начинается с потери поверхностью жидкости на торце капиллярной трубки, по которой жидкость подается в разрядную систему устойчивости, по отношению к поверхностному заряду. Но Зелени проводил свои эксперименты в начале века, когда представления об электрических разрядах находились в стадии формирования. Он еще не отделял явление неустойчивости поверхности жидкости в электрическом поле, сопровождающееся эмиссией в межэлектродное пространство сильно заряженных капель и ионов, от коронного разряда. Тем не менее, накопленные им экспериментальные данные оказались весьма полезными.

В последующих экспериментальных исследованиях [16, 17] была сформулирована безразмерная комбинация физических величин, определяющая критические условия реализации неустойчивости жидкой поверхности во внешнем электрическом поле в виде:

$$E_0 \sqrt{R/\sigma} \geq \text{Const}, \quad (2)$$

$$\text{или как } w \equiv \frac{E_0^2 R}{\sigma} \geq \text{const}, \quad (2a)$$

где  $w$  – безразмерный параметр (параметр Тейлора), характеризующий устойчивость незаряженной электропроводной капли по отношению к внешнему однородному электростатическому полю  $E_0$  (по отношению к индуцированному на капле заряду);  $E_0$  – напряженность электростатического поля;  $R$  – первоначальный

радиус сферической капли (в электростатическом поле она принимает равновесную форму, близкую к сфероиду [18]), если речь идет о неустойчивости незаряженной капли в электростатическом поле, или радиус кривизны поверхности жидкости в экспериментах с мыльными пузырями [16]. Как следует из контекста, примерно в тот же период времени начались экспериментальные исследования реализации неустойчивости незаряженной капли по отношению к внешнему электростатическому полю. Эксперименты проводились со свободно падающими каплями [19–23], с каплями, взвешенными в другой жидкости [17, 24], с мыльными пузырями [16].

По поводу величины константы в (2) разные авторы получали различные данные, но близкие к истинному значению, за которое в настоящее время принимают значение, найденное Тейлором в работе [25] как экспериментальным путем  $w = 2,59 \pm 0,08$ , так и численным расчетом  $w = 2,62$ . Видно, что в пределах ошибки эксперимента эти значения совпадают. В последующие годы эксперименты по поводу нахождения критических условий реализации незаряженной капли в электростатическом поле не прекращались [26–29].

Теоретическое осмысление проведенных по этому вопросу экспериментов тормозилось тем обстоятельством, что равновесная форма капли во внешнем электростатическом поле уже не сферическая, но близка к вытянутому по полю сфероиду. Это обстоятельство не позволило воспользоваться разложением потенциальной и кинетической энергии течения жидкости в капле по сферическим функциям, как это сделал Рэлей. Правда, в [30] Моррисон и др. предприняли попытку применить математический аппарат Рэля к сфероидальной капле совсем без изменений, но не совсем удачно: найденное ими теоретическим путем критическое значение полевого параметра  $w$  на 40% превышало истинное.

Следует отметить, что работы [14–30] выполнены при игнорировании влияния поля тяжести, так что справедливы лишь для капель с размерами, много меньшими капиллярной постоянной жидкости, находящихся в состоянии невесомости [26] или взвешенных в другой жидкости [17, 24].

В первой половине 20 века выполнены и работы по исследованию неустойчивости поверхности электропроводной несжимаемой жидкости в условиях, когда полем силы тяжести нельзя пренебрегать [31–34]. Речь идет об исследовании закономерностей реализации неустойчивости плоской безграничной поверх-

ности идеальной несжимаемой идеально электропроводной жидкости по отношению к внешнему электростатическому полю.

Тонкс [31] в умозрительном, но логически выверенном построении исследовал неустойчивость плоской поверхности электропроводной несжимаемой жидкости и нашел критерий развития ее неустойчивости в  $E_0$  в виде:

$$\frac{E_0^2}{\sqrt{\sigma\rho g}} \geq 4\pi,$$

где  $\rho$  – массовая плотность жидкости;  $g$  – ускорение поля сил тяжести.

Френкель [32] в строгом электрогидродинамическом аналитическом расчете уточнил критерий, полученный Тонксом:

$$\frac{E_0^2}{\sqrt{\sigma\rho g}} \geq 8\pi. \quad (3)$$

Явление неустойчивости плоской поверхности жидкости в электрическом поле в итоге получило название неустойчивости Тонкса-Френкеля.

Если ввести капиллярную постоянную жидкости в виде [13]  $a = \sqrt{\sigma/\rho g}$ , то условие (3) может быть переписано как:

$$W_{TF} \equiv \frac{E_0^2 a}{\sigma} \geq 8\pi. \quad (4)$$

Для получения (4) соотношение (3) следует умножить и разделить на  $\sqrt{\sigma}$ .  $W_{TF}$  – обозначение параметра неустойчивости, который именуется неустойчивостью Тонкса-Френкеля. В виде (4) критерий неустойчивости Тонкса-Френкеля очень похож на критерий неустойчивости Тейлора (2), различие лишь в константах  $R$  и  $a$ , а также числах, стоящих в правой части неравенств (2а) и (4). Видно также, что критерий неустойчивости Тонкса-Френкеля на порядок жестче критерия Тейлора.

## 2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА

Итак, мы имеем три вида электростатических неустойчивостей поверхности электропроводной жидкости различных геометрических форм, при этом определены критические условия реализации каждой из них. Но сравнить их между собой в приведенном виде затруднительно. Для проведения подобного сравнения следует выделить одинаковую для всех ситуаций физическую величину, играющую определяющую роль в реализации неустойчивости, которую можно выразить в количественной форме. На подобную роль подходит поверхностная плотность заряда, собственного или индуциро-

ванного, в точке реализации неустойчивости (в тот момент, когда выбрасывается струя).

Сравним между собой по величине поверхностные плотности заряда  $\kappa$  в точке реализации неустойчивости для заряженной капли, незаряженной капли в электростатическом поле и плоской поверхности электропроводной несжимаемой жидкости. Будем исходить из того, что равновесная форма незаряженной капли во внешнем электростатическом поле сфероидальна, что в момент потери устойчивости сферической заряженной капли она начинает вытягиваться в сфероид, и когда ее эксцентриситет достигнет определенной величины, на ее вершинах образуются эмитирующие выступы (конусы Тейлора), с которых и происходит сброс избыточного заряда. На плоской поверхности жидкости конусы Тейлора, согласно Тонксу [31], начинают расти по достижении критической плотности поверхностного заряда, и каждый эмиссионный выступ принимает форму, близкую к сфероидальной [35].

Таким образом, с учетом зеркального отображения в плоскости растущего эмиссионного выступа для качественного исследования достаточно разобрать две ситуации: неустойчивой по отношению к собственному заряду заряженной капли и незаряженной во внешнем электростатическом поле, неустойчивой по отношению к поляризационному заряду. Нам предстоит сравнить поверхностную плотность собственного заряда на вершине заряженной сфероидальной капли с поверхностной плотностью заряда, индуцированного внешним электростатическим полем, для такой же сфероидальной капли. С физической точки зрения мы имеем различные объекты: уединенный заряд и уединенный диполь. Ожидать полного совпадения нельзя, хотя косвенные данные о величине эксцентриситета сфероидальной капли в рассматриваемых ситуациях по результатам экспериментов указывают на близкое сходство, см., например, [10, 19, 26, 27, 29, 36] (имеются в виду близости величин эксцентриситетов капель на стадии выбрасывания струй).

Аналитическое выражение для поверхностной плотности заряда на заряженном зарядом  $Q$  электропроводном сфероиде, вытянутом вдоль оси  $x$ , приведено в [37, с. 40] в декартовых координатах:

$$\kappa_q \equiv \frac{q}{4\pi ab^2 \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{2\rho^2}{b^4}}},$$

где  $\rho \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$  – расстояние от точки на поверхности сфероида до оси  $x$ ;  $a$  и  $b$  – большая и малая его полуоси. Легко видеть, что в

вершине сфероида (точке с координатами  $x = a$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ) поверхностная плотность собственного заряда капли определится выражением:

$$\kappa_q \equiv \frac{q}{4\pi b^2},$$

или, переходя к эксцентриситету сфероидальной формы,

$$\kappa_q \equiv \frac{q}{4\pi R^2(1-e^2)^{1/3}}. \quad (5)$$

Аналитическое выражение для поверхностной плотности заряда на проводящем незаряженном сфероиде, помещенном в коллинеарное внешнее электростатическое поле, выписано в сфероидальных координатах в [37, с. 44]. Переписывая его для вершины сфероида, сориентированной противоположно полю, получим:

$$\kappa_e \equiv \frac{E_0}{4\pi} \frac{2e^3}{(1-e^2) \left( \ln \frac{1+e}{1-e} - 2e \right)}. \quad (6)$$

Чтобы сравнить по величине поверхностные плотности электрического заряда на вершине капли в рассматриваемых случаях на пороге устойчивости, найдем отношение  $\kappa_e$  к  $\kappa_q$ , используя (6) и (5):

$$\frac{\kappa_e}{\kappa_q} \equiv \alpha(e) \equiv \frac{E_0 \times R^2}{q} \times \frac{2e^3}{(1-e^2)^{2/3} \left( \ln \frac{1+e}{1-e} - 2e \right)}.$$

Критические для реализации неустойчивости значения  $E_0$  и  $q$  выразим из критериев реализации неустойчивости (2a) при  $\text{const} = 2,62$  и (1) при  $n = 2$ . В итоге получим:

$$\begin{aligned} \frac{\kappa_e}{\kappa_q} \equiv \alpha(e) &\equiv \frac{R^2 \sqrt{\frac{2,62\sigma}{R}}}{\sqrt{16\pi\sigma R^3}} \times \frac{2e^3}{(1-e^2)^{2/3} \left( \ln \frac{1+e}{1-e} - 2e \right)} = \\ &\equiv \sqrt{\frac{2,62}{16\pi}} \times \frac{2e^3}{(1-e^2)^{2/3} \left( \ln \frac{1+e}{1-e} - 2e \right)}. \end{aligned} \quad (7)$$

График критической зависимости  $\alpha = \alpha(e)$  приведен на рис. 1. Легко видеть, что непосредственно перед выбросом струи с вершины капли поверхностная плотность собственного заряда на вершине заряженной капли превышает поверхностную плотность заряда, индуцированного внешним электростатическим полем на вершине незаряженной сфероидальной капли:  $\kappa_q > \kappa_e$ . Расчеты показывают, что при варьировании величин  $E_0$  и  $q$  кривая на рис. 1 просто смещается по вертикали, качественно не меняясь. Интересно отметить, что

зависимость (7) не содержит радиуса капли, иначе говоря, соотношение собственного и индукционного зарядов не зависит от линейных размеров капли.

Величины поверхностных плотностей заряда на вершинах заряженной капли (5)  $\kappa_q$  и незаряженной, но помещенной в однородное электростатическое поле (6)  $\kappa_e$  для критических комбинаций зарядов в системе единиц CGSE при  $E_0 = 0$  CGSE;  $q = 2$  CGSE;  $R = 0,1$  см и  $E_0 = 43,8$  CGSE;  $q = 0$  CGSE;  $R = 0,1$  см приведены на рис. 2 и 3 соответственно.

Что касается неустойчивости Тонкса-Френкеля, то для воды критическое значение напряженности поля находится из (3) или (4), а уже из него находим критическую поверхностную плотность заряда:

$$\kappa_{cf} > \sqrt[4]{\rho g \sigma / 4\pi^2}.$$

Для заряженной поверхности воды найдем  $\kappa_{cf} \approx 6,6$  CGSE.

### 3. ОБ ИЗМЕНЕНИИ СИММЕТРИИ ПРИ РЕАЛИЗАЦИИ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Скажем пару слов о смене типа симметрии при реализации электростатической неустойчивости. Как отмечалось ранее, мы рассматриваем различные физические объекты на пороге потери ими устойчивости по отношению к поверхностному заряду.

Заряженная сферическая капля до потери устойчивости обладает центральной симметрией, которую при реализации неустойчивости и вытягивании капли в сфероид меняет на осевую симметрию. Физический механизм реализации неустойчивости заряженной капли описан в [38].

Сфероидальная незаряженная капля, вытянутая вдоль внешнего электростатического поля, обладает осевой симметрией, которую при неустойчивости не меняет. Физический механизм реализации неустойчивости незаряженной капли во внешнем электростатическом поле описан в [39].

Плоская поверхность жидкости, перпендикулярная однородному внешнему электростатическому полю, обладает зеркальной симметрией, которую теряет при реализации неустойчивости. Закономерности временного роста и форма эмиссионного выступа на плоской заряженной поверхности жидкости описаны в [35].

Интересно, что потеря устойчивости заряженной поверхности жидкости во всех трех рассмотренных случаях происходит с тем



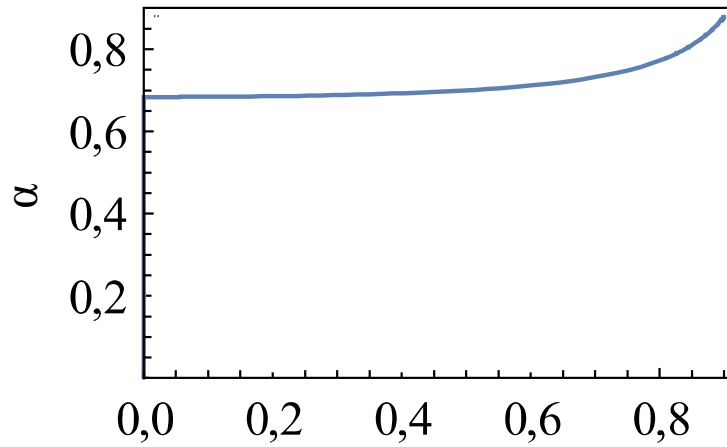


Рис. 1. Зависимость отношения  $\kappa_e$  к  $\kappa_q$  от величины эксцентриситета капли.

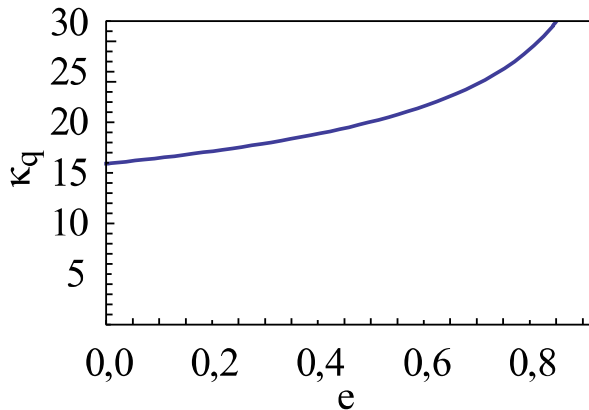


Рис. 2. Зависимость поверхностной плотности электрического заряда на вершине заряженной капли  $\kappa_q$  от величины ее эксцентриситета.

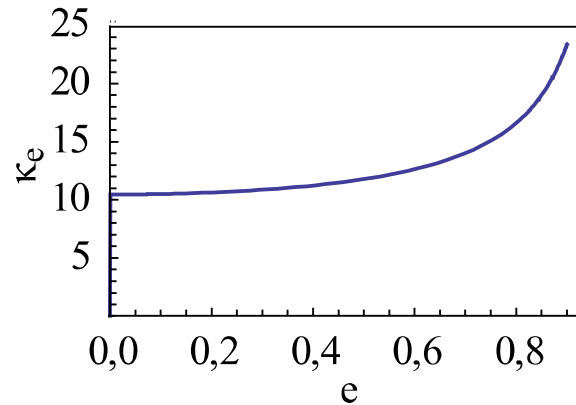


Рис. 3. Зависимость поверхностной плотности индуцированного электрического заряда на вершине незаряженной капли во внешнем электростатическом поле, коллинеарном оси симметрии капли  $\kappa_e$ , от величины ее эксцентриситета.

большим изменением потенциальной энергии, чем более существенно меняется симметрия.

Еще на одно обстоятельство следует обратить внимание. А именно выполнение критических условий (2а) и (4) означает немедленный рост конусов Тейлора, а при выполнении условия (1) для  $n = 2$  сферическая капля только начинает вытягиваться в сфероид, проходя через серию неравно-весных сфероидальных форм. То есть центральная симметрия меняется на осевую, и лишь по прошествии какого-то малого, но конечного интервала времени на вершинах вытягивающейся капли начинается рост конусов Тейлора. Отметим также, что рост конусов Тейлора происходит в результате суперпозиции высоких мод, возбуждающихся при увеличении поверхностной плотности заряда на самом конусе [36, 38, 39].

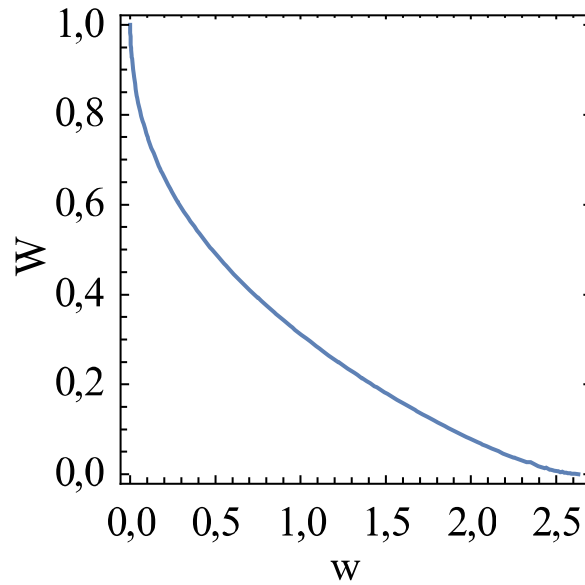
#### 4. ВЛИЯНИЕ ВНЕШНИХ ПОЛЕЙ

Рассмотрим неустойчивость заряженной капли, висящей в суперпозиции внешнего электростатического и гравитационного полей, иначе говоря, в электростатическом подвесе. Собственно говоря, все эксперименты по проверке справедливости критерия Рэлея прово-

дились на подвесах, в которых влияние электростатического поля, поддерживающего каплю, существенно [6–12]. Что касается теоретических трудов, то еще в прошлом веке начались работы по исследованию устойчивости заряженной капли, висящей в суперпозиции гравитационного и электростатического полей [40], которые продолжились последующие годы [41, 42].

Для удобства дальнейших рассуждений примем, что первоначально сферическая капля радиуса  $R$  с зарядом  $Q$  несжимаемой электропроводной жидкости с коэффициентом межфазного натяжения  $\sigma$ , массовой плотностью  $\rho$ , находящаяся в гравитационном поле  $\vec{g}$ , помещена в однородное электростатическое поле  $\vec{E}_0$ , параллельное ускорению свободного падения  $\vec{E}_0 \parallel \vec{g}$ . Заряд капли  $Q$  для определенности будем считать отрицательным, чтобы поле  $\vec{E}_0$  удерживало каплю в поле сил тяжести в подвешенном состоянии.

Поскольку в рассматриваемой ситуации следует учитывать влияние на устойчивость капли ее заряда, внешнего электростатического и гравитационного полей, то следует принять во внимание параметры Рэлея  $W$  и Тейлора  $w$ , а



**Рис. 4.** Критическая зависимость между величиной параметра Рэля и величиной параметра Тейлора для заряженной капли, подвешенной в суперпозиции внешнего электростатического и гравитационного полей.

**Таблица.** Равновесные значения физических характеристик заряженной капли во внешнем электростатическом поле на пороге реализации ее неустойчивости

| $W$           | 0    | 0,05 | 0,1   | 0,2  | 0,3  | 0,4  | 0,5   | 0,55 | 0,6  | 0,65 | 0,7  | 0,8  | 0,9  | 1   |
|---------------|------|------|-------|------|------|------|-------|------|------|------|------|------|------|-----|
| $w$           | 2,63 | 2,17 | 1,88  | 1,42 | 1,04 | 0,73 | 0,48  | 0,38 | 0,29 | 0,2  | 0,15 | 0,06 | 0,02 | 0   |
| $e^2$         | 047  | 0,41 | 0,374 | 0,32 | 0,27 | 0,22 | 0,172 | 0,15 | 0,13 | 0,1  | 0,09 | 0,06 | 0,02 | 0   |
| $Q$           | 0    | 0,43 | 0,61  | 0,86 | 1,05 | 1,21 | 1,35  | 1,42 | 1,48 | 1,54 | 1,6  | 1,71 | 1,82 | 2,9 |
| $E$           | 43,8 | 39,8 | 37    | 32,2 | 27,6 | 23,1 | 18,7  | 16,6 | 14,6 | 12   | 10,5 | 6,78 | 3,31 | 0   |
| $\kappa_{де}$ | 13,7 | 16   | 16,4  | 16,8 | 16,7 | 16,6 | 16,3  | 16,2 | 16   | 15,8 | 15,7 | 15,5 | 15,4 | 15  |

также ввести гравитационный параметр  $\eta \equiv \rho g R^2 / \sigma$  и условие подвеса, связывающее эти три параметра аналитической зависимостью, вытекающей из равенства электростатической силы, поддерживающей каплю, противоположно направленной силе тяжести:

$$Q \times \vec{E}_0 = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \times \vec{g}. \quad (8)$$

В безразмерном виде условие (8) запишется в виде:

$$\sqrt{w \times W} = \frac{\sqrt{\pi}}{3} \eta. \quad (8a)$$

В работе [40] получена в линейном приближении по  $e^2$  критическая зависимость между параметрами Рэля и Тейлора заряженной капли в однородном электростатическом поле, подвешенной в поле сил тяжести, имеющая вид:

$$\frac{1}{4} \left( 1 + \frac{10}{21} e^2 \right) \eta + \left( 1 + \frac{87}{42} e^2 \right) W + \frac{81}{280\pi} \left( 1 + \frac{4171}{630} e^2 \right) w \geq 1; \quad (9)$$

где капля принимается примерно сфероидальной с эксцентриситетом:

$$e \approx \sqrt{\frac{9}{16\pi} \frac{w}{1-W}}. \quad (10)$$

а параметры  $w$ ,  $W$  и  $\eta$  определены выше. Принимая во внимание соотношения (8a) и (10), критическое соотношение (9) можно переписать в виде зависимости только между параметрами Рэля  $W$  и Тейлора  $w$ :

$$\frac{1}{4} \frac{3}{\sqrt{\pi}} \left( 1 + \frac{10}{21} \frac{9}{16\pi} \frac{w}{1-W} \right) \sqrt{w \times W} + \left( 1 + \frac{87}{42} \frac{9}{16\pi} \frac{w}{1-W} \right) W + \frac{81}{280\pi} \left( 1 + \frac{4171}{630} \frac{9}{16\pi} \frac{w}{1-W} \right) w \geq 1;$$

или

$$\begin{aligned} & ((1-W) + 0,371 \times w) W + \\ & (0,42857 \times (1-W) + 0,036557 \times w) \sqrt{w \times W} + \\ & + (0,092129(1-W) + 0,109265 \times w) w \geq (1-W). \end{aligned} \quad (11)$$

Легко видеть, что при  $w = 0$  получаем критерий устойчивости сильно заряженной капли Рэля  $W = 1$ , и наоборот: при  $W = 0$  – критерий неустойчивости Тейлора в виде  $w = 2,63$  (что представляется весьма точным ввиду того, что выражение (9) получено лишь в линейном приближении по  $e^2$ ). График критической зависимости (11) при произвольных (докритических в смысле условий (1) и (2a)) значениях  $W$  и  $w$  приведен на рис. 4. Капли,

соответствующие точкам, лежащим на рис. 4 ниже кривой, устойчивы, а соответствующие точкам, лежащим выше кривой, неустойчивы по отношению к суперпозиции собственного и индукционного зарядов.

Теперь можно поставить вопрос о критической плотности заряда на вершинах заряженной капли, ось симметрии которой коллинеарна внешнему однородному электростатическому полю.

По рис. 4, используя соотношения (1)–(3), легко определить пары значений  $q$  и  $E_0$ , соответствующие точкам критической кривой (две верхние строчки в таблице). Затем в этих точках по (1) и (2а) найдем  $q$  и  $E_0$  (четвертая и пятая строчки в таблице) и по соотношениям (5) и (6) – критическую поверхностную плотность заряда на вершинах заряженной сфероидальной капли во внешнем однородном электростатическом поле  $\kappa_{qe}$ :

$$\begin{aligned} \kappa_{qe} &\equiv \frac{q}{4\pi R^2 (1-e^2)^{1/3}} + \frac{E_0}{4\pi} \frac{2e^3}{(1-e^2) \left( \ln \frac{1+e}{1-e} - 2e \right)} \equiv \\ &\equiv \frac{1}{4\pi R^2} \left[ \frac{q(1-e^2)^{2/3} \left( \ln \frac{1+e}{1-e} - 2e \right) + 2e^3 E_0 R^2}{(1-e^2) \left( \ln \frac{1+e}{1-e} - 2e \right)} \right]. \end{aligned}$$

Расчетные значения приведены в таблице (шестая строчка).

Несложно видеть, что поверхностная плотность заряда на вершине сфероида изменяется с увеличением сфероидальности капли не монотонно: она сначала увеличивается, а затем начинает снижаться.

В третьей строчке выпишем значения равновесного эксцентриситета заряженной капли во внешнем электростатическом поле (рассчитанного по (10)) для каждой точки. Видно, что по мере увеличения параметра Тейлора  $w$  эксцентриситет капли монотонно растет.

Следует отметить, что величина эксцентриситета, при котором наступает неустойчивость сильно заряженной капли, согласно [36], равна (измерения по фотографиям) примерно 0,9. По данным [25], эксцентриситет незаряженной капли на пороге потери устойчивости в однородном электростатическом поле равен  $\approx 0,73$ , по фотографиям, приведенным в [26],  $\approx 0,836$ .

Во всяком случае, согласно данным таблицы, тот факт, что неустойчивость сильно заряженной капли и незаряженной капли во внешнем электростатическом поле реализуется при различных значениях эксцентриситета и поверх-

ностной плотности электрического заряда на вершинах, не вызывает сомнения.

Видно, что с ростом параметра  $w$  и убыванием параметра  $W$  равновесный эксцентриситет увеличивается, но он существенно меньше, чем тот, при котором с поверхности жидкости (с вершин образовавшихся на ней конусов Тейлора) выбрасываются струйки (то есть имеет место финал развития неустойчивости).

Это означает, что на каплях, потерявших устойчивость, вначале возбуждается неустойчивость основной моды, и только потом по мере ее удлинения (по мере увеличения сфероидальности и перераспределения заряда по ее поверхности) возбуждаются высокие моды и образуются конусы Тейлора. Другими словами, механизм реализации неустойчивости такой же, как описан в [38, 39, 43], разница лишь в том, что равновесная форма заряженной капли – сфера, а в отсутствие заряда, но при наличии внешнего однородного электростатического поля – сфероидальная. После потери устойчивости (читай, равновесной формы), капля начинает удлиняться с ростом амплитуды основной моды, проходит череду неравновесных сфероидальных форм и, лишь достигнув значительного удлинения, формирует на своих вершинах эмиссионные выступы (конусы Тейлора) и начинает сбрасывать избыточный заряд, как это описано в [38, 39].

Итак, когда теряет устойчивость сильно заряженная капля, происходит: а) смена типа симметрии; б) смена равновесных состояний на исключительно неравновесные (равновесная форма – сферическая, а следующая за потерей устойчивости стадия – переход к неравновесным формам: вытягивание в сфероид с растущим эксцентриситетом и последующее возбуждение высоких мод [38]).

Если речь идет об устойчивости незаряженной капли во внешнем электростатическом поле, то равновесная форма капли в таких условиях сразу сфероид, вытянутый по полю, и только срыв равновесия при достижении напряженностью поля критической величины означает переход к неравновесным сфероидальным формам и рост конусов Тейлора [39].

Выбрасывание струй капелек с вершин капли осуществляется по качественно сходным механизмам в обоих случаях.

Наконец неустойчивость плоской поверхности жидкости в перпендикулярном электростатическом поле происходит со сменой равновесной плоской формы жидкой поверхности (в совокупности действующих полей) на нерав-

новесную: плоскую, покрытую растущими выступами.

## 5. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СТРУИ

Все сказанное выше имеет отношение и к заряженным струям, корректнее говоря, к электростатической неустойчивости высоких ( $m \geq 2$ ) азимутальных мод струи, имеющей так же, как вышеописанные неустойчивости Рэля, Тейлора и Тонкса-Френкеля, пороговый характер.

Согласно [44], электростатическая неустойчивость струи реализуется при выполнении безразмерного условия:

$$4\pi\kappa_j^2 \geq 2,905,$$

где  $\kappa_j$  – безразмерная поверхностная плотность электрического заряда на струе, когда обезразмеривание проведено при  $R = \rho = \sigma = 1$ , где  $R$  – радиус струи;  $\rho$  – плотность жидкости;  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения. В системе CGSE легко найти:  $\kappa_j = 4,08$  CGSE.

Следует также отметить, что осевая симметрия струи при реализации электростатической неустойчивости исчезает.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведен анализ величины поверхностной плотности электрического заряда при реализации электростатической неустойчивости заряженной капли идеальной несжимаемой электропроводной жидкости, незаряженной капли во внешнем электростатическом поле, заряженной струи и заряженной плоской поверхности жидкости. Выяснилось, что поверхностная плотность заряда во всех случаях различна.

## КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Rayleigh, (Strutt, J.W.), On the equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity, *Phil. Mag.*, 1882, vol. 14, p. 184.
2. Baily, A.G., Electrostatic spraying of liquids, *Phys. Bull.*, 1984, vol. 35, no. 4, p. 146.
3. Френкель, Я.И., *На заре новой физики*, Л.: Наука, 1970. 284 с.
4. Стретт, Дж.В., (Лорд Рэлей), *Теория звука*. Т. 2. М.: Гостехиздат, 1955. 475 с.
5. Hendrics, C.D., Schneider, J.M., Stability of conducting droplet under the influence of surface tension and electrostatic forces, *J. Amer. Phys.*, 1963, vol. 1, no. 6, p. 450.
6. Doyle, A., Moffet, D.R., Vonnegut, B., Behavior of evaporating electrically charged droplets, *J. Coll. Sci.*, 1964, vol. 19, p. 136.
7. Abbas, M.A., Latham, J., The instability of evaporating charged drops, *J. Fluid. Mech.*, 1967, vol. 30, no. 4, p. 663.
8. Berg, T.G.O., Trainor, R.J., Vaughan, U., Stable Unstable and Metastable Charged Droplets, *J. Atmosph. Sci.*, 1970, vol. 27, no. 11, p. 1173.
9. Schweizer, J.D., Hanson, D.N., Stability limit of charged drops, *J. Coll. Int. Sci.*, 1971, vol. 35, no. 3, p. 417.
10. Duft, D., Lebbeus, H., Huber, B.A., Shape oscillations and stability of charged microdroplets, *Phys. Rev. Lett.*, 2002, vol. 89, no. 8, p. 1.
11. Fong Chee, Sheng, Black, N.D., Kiefer, P.A., Shaw, R.A., An experiment on the Rayleigh instability of charged liquid drops, *Am. J. Phys.*, 2007, vol. 75, no. 6, p. 499.
12. Hunter, H.C., Ray, Asit K., On progeny droplets emitted during Coulombic fission of charged microdrops, *Phys. Chem. Chem. Phys.*, 2009, vol. 11, no. 29, p. 6156.
13. Ландау, Л.Д., Лифшиц, Е.М., *Гидродинамика*. М.: Наука, 1982. 620 с.
14. Zeleny, J., On the conditions of instability of electrified drops, with application to the electrical discharge from liquid points, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1914, vol. 18, part 1, p. 71.
15. Zeleny, J., Instability of electrified liquid surfaces, *Phys. Rev.*, 1917, vol. 10, no. 1, p. 1.
16. Wilson, C.T., Taylor, G.I., The bursting of soap-bubbles in a uniform electric field. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1925, vol. 22, p. 728.
17. Nolan, G.G., The breaking of water drops by electric field, *Proc. Roy. Irish Acad.*, 1926, vol. A37, p. 28.
18. O' Kanski, C.J., Thacher, H.C., The distortion of aerosol droplets by an electric field, *J. Phys. Chem.*, 1953, vol. 57, p. 955.
19. Macky, W.A., Some Investigations on the Deformation and Breaking of Water Drops in Strong Electric Fields, *Proc. Roy. Soc. London*, 1931, vol. 133, no. A822, p. 565.
20. Latham, J., The mass loss of water drops falling in electric fields, *Quart J. R. Met. Soc.*, 1965, vol. 91, no. 387, p. 87.
21. Matthews, J.B., Mass Loss and Distortion of Freely Water Drop in an Electric Field, *J. Geophys. Res.*, 1967, vol. 72, p. 3007.
22. Latham, J., Myers, V., Loss of charge and mass from raindrops falling in intense Electric Fields, *J. Geophys. Res.*, 1970, vol. 75, no. 3, p. 515.
23. Richards, C.N., Dawson, G.A., The hydrodynamic instability of water drops falling at terminal velocity in vertical electric fields, *J. Geophys. Res.*, 1971, vol. 76, no. 15, p. 3445.
24. Бейтуганов, М.Н., Об обуславливаемых сильными электрическими полями физических явлениях в



- облака, *Метеорология и гидрология*, 1989, № 9, с. 42.
25. Taylor, G.I., Disintegration of Water Drops in an Electric Field, *Proc. Roy. Soc. London*, 1964, vol. A280, p. 383.
  26. Inculet, I.I., Floryan, J.M., Haywood, R.J., Dynamics of Water Droplets Breakup in Electric Fields, *IEEE Trans. Ind. Appl.*, 1992, vol. 28, no. 5, p. 1203.
  27. Grimm, R.L., Beauchamp, J.L., Dynamics of field-induced droplet ionization: time-resolved studies of distortion, jetting, and progeny formation from charged and neutral methanol droplet exposed to strong electric fields, *J. Phys. Chem. B*, 2005, vol. 109, p. 8244.
  28. Kim, O.V., Dunn, P.F., Control production by in-flight electrospraying, *Langmuir*, 2010, vol. 26, p. 15807.
  29. Karyappa, R.B., Deshmukh, S.D., Thaokar, R.M., Breakup of a conducting drop in a uniform electric field, *J. Fluid Mech.*, 2014, vol. 754, p. 550.
  30. Morrison, C.A., Leavitt, R.P., Wortman, D.E., The extended Rayleigh theory of the oscillation of liquid droplets, *J. Fluid Mech.*, 1981, vol. 104, p. 295.
  31. Tonks, L., A Theory of Liquid Surface Rupture by Uniform Electric Field, *Phys. Rev.*, 1935, vol. 48, p. 562.
  32. Френкель, Я.И., К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме, *ЖЭТФ*, 1936, т. 6, № 4, с. 348.
  33. Taylor, G.I., McIwan, A.D., The stability of a horizontal fluid interface in vertical electric field, *J. Fluid Mech.*, 1965, vol. 22(Part 1), p. 1.
  34. Шутов, А.А., Генерация электрогидродинамических волн на границе раздела жидкость-вакуум, *ЖТФ*, 2002, т. 72, № 8, с. 126.
  35. Григорьев, А.И., Ширяева, С.О., Белоножко, Д.Ф., Климов, А.В., О форме «конуса Тэйлора» и характерном времени его роста, *ЭОМ*, 2004, № 4, с. 34.
  36. Duft, D., Achtzehn, T., Müller, R., Huber, B.A., et al., Rayleigh jets from levitated microdroplets, *Nature*, 2003, vol. 421, p. 128.
  37. Ландау, Л.Д., Лифшиц, Е.М., *Электродинамика сплошных сред*, М.: Наука, 1982. 620 с.
  38. Григорьев, А.И., О механизме неустойчивости заряженной проводящей капли, *ЖТФ*, 1985, т. 55, № 7, с. 1272.
  39. Григорьев, А.И., Синкевич, О.А., К механизму развития неустойчивости капли жидкости в электрическом поле, *Известия АН СССР. МЖГ*, 1985, № 6, с. 10.
  40. Григорьев, А.И., Ширяева, С.О., Белавина, Е.И., Равновесная форма заряженной капли в электрическом и гравитационном полях, *ЖТФ*. 1989, т. 59, № 6, с. 27.
  41. Ширяева, С.О., Нелинейные осцилляции заряженной капли, подвешенной в электростатическом и гравитационном полях, *Известия АН СССР. МЖГ*, 2006, № 2, с. 17.
  42. Ширяева, С.О., Петрушов, Н.А., Григорьев, А.И., Об устойчивости сильно заряженной капли, подвешенной в суперпозиции гравитационного и электростатического полей, *ЖТФ*, 2019, т. 89, № 8, с. 1189.
  43. Жаров, А.Н., Ширяева, С.О., Григорьев, А.И., Диспергирование заряженной капли в электростатическом поле, *ЖТФ*, 1999, т. 69, № 12, с. 26.
  44. Григорьев, А.И., Электростатическая неустойчивость сильно заряженной струи электропроводной жидкости, *ЖТФ*, 2009, т. 79, № 4, с. 36.

### Summary

The paper deals with some peculiarities of realization of electrostatic instability of a charged liquid surface on the vertices of the charged and uncharged drops in an external electrostatic field in a cylindrical jet and a flat surface. It was shown that the critical values of the surface density of the electric charge under the mentioned conditions on the threshold of the realization of instability are different in magnitude, despite the phenomenological similarity. Most probably, the reason is the differences (under all mentioned conditions) in the spatial change in the strength of the electrostatic field in the vicinity of the growing (when the charged surface of the liquid is unstable) emission protrusion. Both equilibrium and non-equilibrium forms of droplets, jets, planes and their symmetry were discussed.

*Keywords:* spherical drop, spheroidal drop, plane, jet, surface charge density