

# О влиянии электростатического и аэродинамического полей на закономерности реализации неустойчивости первых трех азимутальных мод жидкой струи

\*С. О. Ширяева, А. И. Григорьев, А. О. Брусницина

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
г. Ярославль, 150000, Россия, \*e-mail: [shir@uniyar.ac.ru](mailto:shir@uniyar.ac.ru)

Поступила 14.01.2020  
После доработки 27.02.2020  
Принята к публикации 03.03.2020

Показано, что неустойчивость жидкой струи по отношению к внешнему электростатическому полю и ее неустойчивость по отношению к наличию внешней материальной среды при наличии общих феноменологических черт различаются по пороговым значениям полевого параметра и параметра Вебера, при которых реализуются указанные неустойчивости для первых двух значений азимутальной моды. Для следующей в порядке возрастания номера изгибно-деформационной моды у обеих неустойчивостей имеются пороги, различающиеся только значениями волновых чисел, при которых они реализуются. Для смешанной электростатически аэродинамической неустойчивости, когда оба параметра – и полевого, и параметра Вебера отличны от нуля, изменяются и пороги реализации неустойчивости, и критические волновые числа.

*Ключевые слова:* жидкая струя, радиальное электростатическое поле, материальная среда, неустойчивость, азимутальное число

УДК 532.517.013.4:77.051.15  
DOI: 10.5281/zenodo.3970467

## ВВЕДЕНИЕ

Если исходить из феноменологии явления дробления струй в аэродинамическом и электростатических полях по отдельности при реализации неустойчивости мод различной симметрии (с различными азимутальными числами  $m = 0; 1; 2$ ), можно видеть их сходство и различие. Тем не менее этому вопросу до сих пор не было уделено нужного внимания, хотя полное понимание происходящих явлений возможно только при ясном осознании их в предельных ситуациях. Попробуем устранить этот пробел в исследовании дробления струй. Все рассуждения проверим на модели идеальной несжимаемой электропроводной жидкости.

Собственно говоря, струя неустойчива по отношению к сжимающему действию поверхностного натяжения по своей сути [1]. Пусть дан жидкий цилиндрический столб (участок струи) с плотностью  $\rho$ , радиусом  $R_0$ , длиной  $L$ , коэффициентом поверхностного натяжения  $\gamma$ . Спрашивается, для какого соотношения между величинами  $L \geq 4,5 \cdot n \cdot R_0$  и  $L$  будет энергетически выгоден самопроизвольный переход под действием сил поверхностного натяжения от этого столба (участка струи) к совокупности сферических капель. Для этого сравним потенциальную энергию  $U_c$  капиллярных сил боковой поверхности жидкого цилиндра длиной  $L$  с потенциальной энергией  $U_s$  капиллярных сил поверхности  $n$  одинаковых сферических капель, на которые предположительно может распадаться

рассматриваемый участок струи. Приравняв объем цилиндра объему  $n$  сферических капель, получим радиус одной капли:  $r = \sqrt[3]{3R_0^2 L / 4n}$ .

Найдем теперь отношение потенциальной энергии капиллярных сил поверхности  $n$  сферических капель  $U_s$  к потенциальной энергии капиллярных сил боковой поверхности участка струи  $U_c$  длиной  $L$ :  $-(U_s / U_c) \equiv \sqrt[3]{9R_0 n / 2L}$ . Потребуем, чтобы это отношение было меньше единицы, и получим условие самопроизвольного разбиения указанного участка струи на  $n$  отдельных капель в виде:  $9R_0 n / 2L < 1$ . Из этого выражения найдем, что, когда с небольшим запасом выполняется условие:  $L \geq 4,5 \cdot n \cdot R_0$ , цилиндрическому столбу энергетически выгодно распасться на  $n$  отдельных капель с радиусами  $r = \sqrt[3]{3R_0^2 L / 4n}$ . Строго говоря, при выполнении условия  $L \geq 4,5 \cdot n \cdot R_0$  возможен распад жидкого столба на капли с радиусами  $r \leq \sqrt[3]{3R_0^2 L / 4n}$ , и реальный распад определится длиной неустойчивой волны, у которой инкремент капиллярной неустойчивости максимален.

Теоретические представления о капиллярном волновом движении на поверхности струи Рэлей развил еще в конце 19 века [2]. Вопрос о влиянии на это движение радиального (по отношению к струе) внешнего электростатического поля и наличия внешней для струи материальной среды поднимался неоднократно разными авторами

(см., например, [3]), так же как и вопрос об ее аэродинамической и электростатической неустойчивостях [4–6]. Это связано с тем, что, во-первых, реальные струи, как правило, движутся относительно среды и параметр Вебера ( $We = \frac{\rho_{ex} \cdot U_0^2 \cdot R_0}{\gamma}$ , где  $U_0$  – скорость струи;

$\rho_{ex}$  – массовая плотность среды) для них всегда отличен от нуля; во-вторых, основные приложения феномена дробления струй связаны с заряженными струями, так как появляется возможность управления потоками образующихся заряженных капель с помощью внешних электрических полей [7].

Следует также отметить, что совместное исследование этих неустойчивостей может способствовать построению корректной теоретической классификации режимов электродиспергирования жидкостей [8–13]. Интересным представляется и то обстоятельство, что при реализации неустойчивости изгибно-деформационной моды струи эмитируются заряженные капельки нанометровых размеров [6, 9, 12, 14], что может иметь важное значение для получения новых наноматериалов.

#### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу о капиллярных колебаниях цилиндрической поверхности заряженной с поверхностной плотностью заряда  $\chi$  струи радиуса  $R$  идеальной несжимаемой жидкости с коэффициентом поверхностного натяжения  $\gamma$  и массовой плотностью  $\rho_{in}$ . Пусть струя движется со скоростью  $U_0$  в неподвижной идеальной несжимаемой диэлектрической среде с плотностью  $\rho_{ex}$  и диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_{ex} \approx 1$ . Задачу будем решать в инерциальной системе отсчета, связанной с осью симметрии невозмущенной струи в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$ , орт  $\vec{e}_z$  которой совпадает по направлению с  $U_0$  и осью симметрии невозмущенной капиллярным волновым движением цилиндрической поверхности струи. Все рассмотрим в безразмерных переменных, в которых  $R = \rho_{in} = \gamma = 1$ , за всеми физическими величинами оставим прежние обозначения.

Примем, что поверхность раздела сред, возмущенная тепловым капиллярным волновым движением, которое генерируется уже за счет теплового движения молекул жидкости, во всем спектре длин капиллярных волн описывается соотношением

$$F = r - 1 - \xi(\varphi, z, t) = 0, \quad |\xi(\varphi, z, t)| \ll 1,$$

где  $\xi(\varphi, z, t)$  – возмущение цилиндрической поверхности струи. Это искажение имеет весьма малую амплитуду  $\sim \sqrt{\kappa T / \gamma}$ , где  $\kappa$  – постоянная Больцмана;  $T$  – абсолютная температура [15]. В численном выражении  $|\xi(\varphi, z, t)| \leq 0,1$  нм для всех жидкостей, включая жидкие металлы.

#### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Полная математическая формулировка задачи состоит из уравнений Эйлера:

$$\frac{\partial \vec{u}_j(\vec{r}, t)}{\partial t} + (\vec{u}_j(\vec{r}, t), \nabla) \vec{u}_j(\vec{r}, t) = -\nabla p(\vec{r}, t),$$

$$j = (in, ex);$$

$\vec{u}_j(\vec{r})$  – поле скоростей течения жидкости в струе среды;

уравнения непрерывности:

$$\text{div } \vec{u}_j(\vec{r}, t) = 0;$$

уравнений для расчета напряженности электростатического поля:

$$(1 + \xi(\varphi, z, t) < r(t) < \infty);$$

$$\text{rot } \vec{E}(\vec{r}, t) = 0; \quad \text{div } \vec{E}(\vec{r}, t) = 0; \quad \Delta \Phi(\vec{r}, t) = 0;$$

естественных граничных условий:

$$r \rightarrow 0: \quad |\vec{u}_{in}(\vec{r}, t)| < \infty;$$

$$r \rightarrow \infty: \quad |\vec{u}_{ex}(\vec{r}, t)| \rightarrow -\vec{U}_0; \quad |\vec{E}(\vec{r}, t)| \rightarrow 0;$$

граничных условий на возмущенной границе раздела сред; кинематического граничного условия

$$\left. \frac{dF}{dt} \right|_{F=0} = 0;$$

динамического граничного условия

$$p_{in}(\vec{r}, t) - p_{ex}(\vec{r}, t) + p_E(\vec{r}, t) - p_\gamma(\vec{r}, t) = 0;$$

$p_{in}(\vec{r}, t)$  – гидродинамическое давление в струе;

$p_{ex}(\vec{r}, t)$  – гидродинамическое давление во

внешней среде;  $p_E(\vec{r}, t) = \frac{\epsilon_{ex} E^2(\vec{r}, t)}{8\pi}$  – давление

электростатического поля [16];  $p_\gamma(\vec{r}, t)$  – капиллярное давление

$$p_\gamma(\vec{r}, t) = 1 - \xi(\varphi, z, t) - \frac{\partial^2 \xi(\varphi, z, t)}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 \xi(\varphi, z, t)}{\partial z^2}$$

и условия для электрического потенциала:

$$\Phi(\vec{r}, t) = \Phi_s(t);$$

$\Phi(\vec{r}, t)$  – потенциал электростатического поля:  $\vec{E}(\vec{r}, t) \equiv -\nabla\Phi(\vec{r}, t)$ ;  $\Phi_s(t)$  – потенциал поверхности струи. Введем также гидродинамические потенциалы  $\psi_j(\vec{r}, t)$ , такие что  $\vec{u}_j(\vec{r}, t) \equiv \nabla\psi_j(\vec{r}, t)$  [1].

### ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Станем решать сформулированную задачу в линейном приближении по безразмерной амплитуде волнового возмущения  $\xi(\varphi, z, t)$  стандартными методами, как это делается, например в [1].

Искомые выражения для возмущения границы раздела сред  $\xi(\varphi, z, t)$ , гидродинамических потенциалов течений в среде  $\psi_1(\vec{r}, t)$  и капле  $\psi_2(\vec{r}, t)$ , а также для электростатического потенциала  $\Phi(\vec{r}, t)$  естественно записать в виде:

$$\begin{aligned}\xi(\varphi, z, t) &= a \cdot \exp(ist) \cdot \exp(ikz + im\varphi); \\ \psi_1(\vec{r}, t) &= b \cdot \exp(ist) \cdot \exp(ikz + im\varphi) \cdot K_m(kr); \\ \psi_2(\vec{r}, t) &= c \cdot \exp(ist) \cdot \exp(ikz + im\varphi) \cdot I_m(kr); \\ \Phi(\vec{r}, t) &= d \cdot \exp(ist) \cdot \exp(ikz + im\varphi) \cdot K_m(kr);\end{aligned}$$

где  $I_m(kr)$  и  $K_m(kr)$  – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода, порядка  $m$  [17],  $m$  – азимутальный параметр;  $s$  – частота, в общем случае комплексная капиллярных волн;  $a, b, c, d$  – неизвестные коэффициенты. Подставляя выписанные проекты решений в систему граничных условий задачи, можно получить дисперсионное уравнение для волн с произвольным азимутальным числом  $m$  в виде:

$$\begin{aligned}\omega^2 + 2\omega \cdot k \cdot \rho_{ex} \cdot U_0 \cdot \beta(m, k) - \omega_0^2 &= 0; \quad (1) \\ \omega_0^2 &\equiv h_m(k) \beta_m(k) \times \\ &\times \left( k^2 + m^2 - 1 + w(1 + h_m(k)) + \frac{k^2 We}{h_m(k)} \right); \\ We &\equiv U_0^2 \rho_{ex}; \quad w \equiv 4\pi\chi^2 \equiv \frac{E^2}{4\pi}; \quad g_m(k) = \frac{kI_m'(k)}{I_m(k)}; \\ h_m(k) &= \frac{kK_m'(k)}{K_m(k)}; \quad \beta_m(k) = \frac{g_m(k)}{h_m(k) - \rho_{ex} g_m(k)},\end{aligned}$$

$k$  – волновое число;  $m$  – азимутальное число;  $\omega_m(k)$  – частота капиллярных волн (в общем случае комплексная), так что  $\xi = \xi_0 \cdot \exp[i\omega_m(k)t]$ ,  $\xi_0$  – начальная амплитуда; штрих у функций Бесселя обозначает производную по аргументу.

Корни (1) легко найти в виде:

$$\begin{aligned}\omega_{1,2} &\equiv -k\rho_{ex}U_0 \cdot \beta_m(k) \mp \\ &\mp \sqrt{k^2 \rho_{ex}^2 U_0^2 \cdot \beta_m(k)^2 + \omega_0^2}.\end{aligned} \quad (2)$$

Корни дисперсионного уравнения имеют приведенный вид из-за реализации на границе раздела сред неустойчивости Кельвина-Гельмгольца [18].

### АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Проанализируем критические условия реализации неустойчивости первых трех азимутальных мод. Внешний вид струи с возбужденными нулевой, первой и второй азимутальными модами приведен на рис. 1–3.

Обозначим подрадикальное выражение в (2), как  $F(k)$ :

$$F(k) \equiv k^2 \rho_{ex}^2 U_0^2 \beta(k)^2 + \omega_0^2.$$

Там, где  $F(k) < 0$ , частота  $\omega$  в (2) комплексна, ее вещественная часть:

$$-k\rho_{ex}U_0 \cdot \beta_m(k)$$

определяет частоту, а мнимая часть  $\mp \sqrt{F(k)}$  отвечает за неустойчивость волн, она определяет их инкремент при  $\sqrt{F(k)} < 0$  или декремент при  $\sqrt{F(k)} > 0$ . При  $We = 0$  и  $w \neq 0$  область отрицательности  $F(k)$  соответствует электростатической неустойчивости, а при  $w = 0$  и  $We \neq 0$  – аэродинамической.

Требование отрицательности  $F(k)$  при проявлении неустойчивости позволяет получить критическое условие возникновения неустойчивости в аналитическом виде:

$$w \geq \frac{(1 - k^2 - m^2)h_m(k) - k^2 We}{(1 + h_m(k))h_m(k)}, \quad (3)$$

когда фиксирован параметр Вебера  $We$ , или в виде:

$$We_{cr} \geq (1 - k^2 - m^2 - w(1 + h_m(k))) \cdot \frac{h_m(k)}{k^2},$$

когда задан зарядовый параметр:  $w$ .

Соответствующие зависимости критических значений полевого параметра  $w$  и параметра Вебера  $We$  от волнового числа приведены на рис. 4 и 5 соответственно. Зависимости критического значения полевого параметра  $w$  от  $k$  (рис. 4) рассчитаны для струи воды при  $\gamma = 72,8$  дин/см;  $\rho_{in} = 1$  г/см<sup>3</sup>;  $R = 2,5$  мм = 0,25 см;  $\rho_{ex} = 0,00129$  г/см<sup>3</sup>;  $We = 0$ ;  $m = 0, 1, 2$ . Зависимости критического значения параметра Вебера  $We$  от  $k$  (рис. 5) рассчитаны для струи воды при  $\gamma = 72,8$  дин/см;  $\rho_{in} = 1$  г/см<sup>3</sup>;  $R = 2,5$  мм = 0,25 см;  $\rho_{ex} = 0,00129$  г/см<sup>3</sup>;  $w = 0$ ;  $m = 0, 1, 2$ .

Из сравнения вида кривых на рис. 4 и 5 видно, что в качественном отношении вид критических кривых для осесимметричной азимутальной

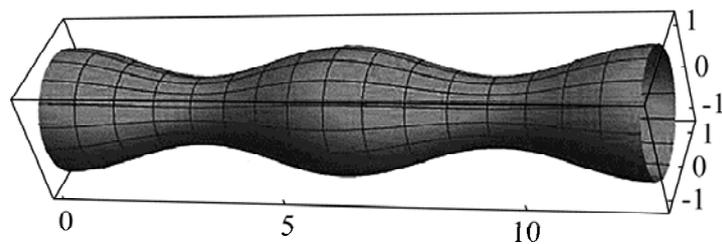


Рис. 1. Осесимметричное возмущение струи ( $m = 0$ ).

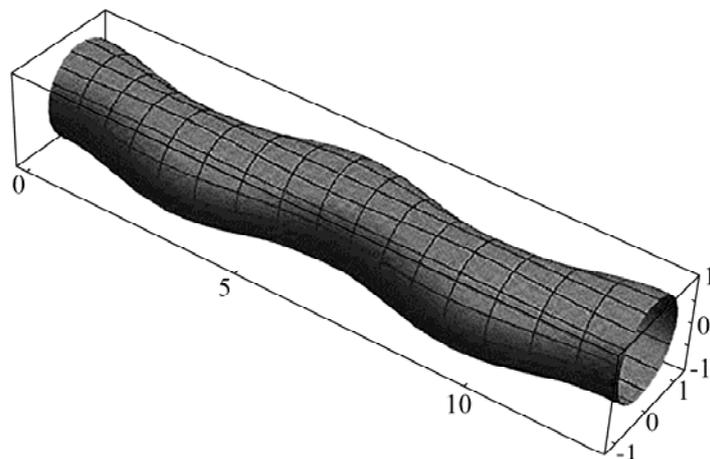


Рис. 2. Изгибное возмущение струи ( $m = 1$ ).

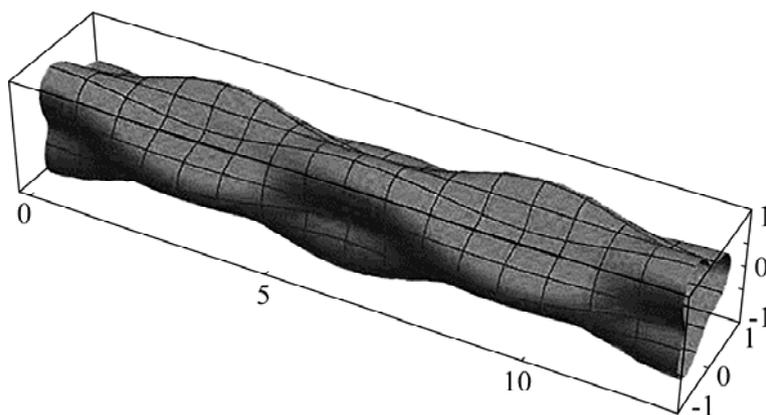


Рис. 3. Изгибно-деформационное возмущение струи ( $m = 2$ ).

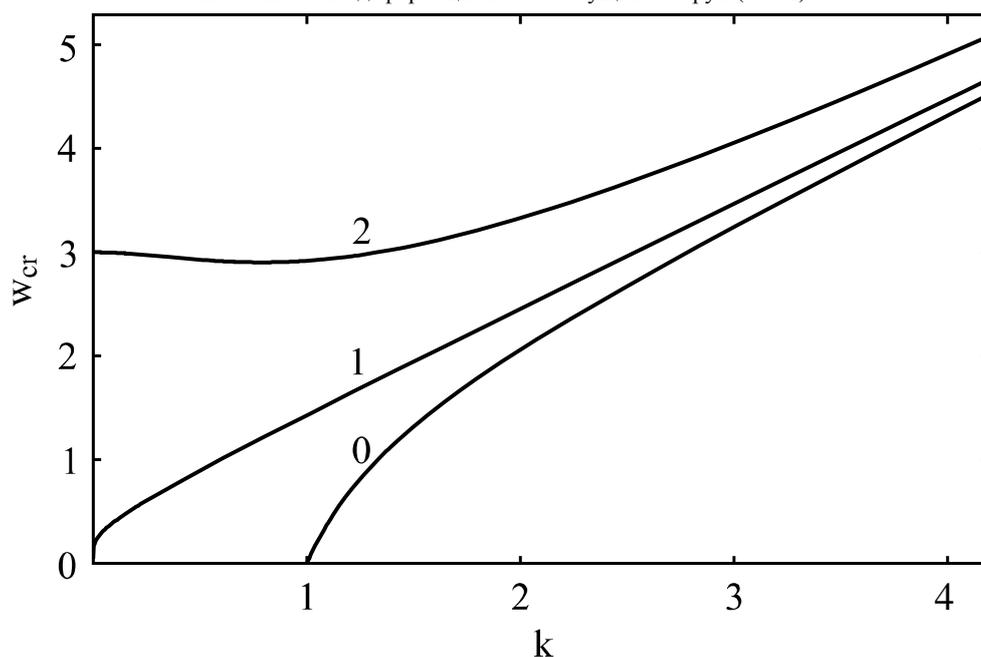
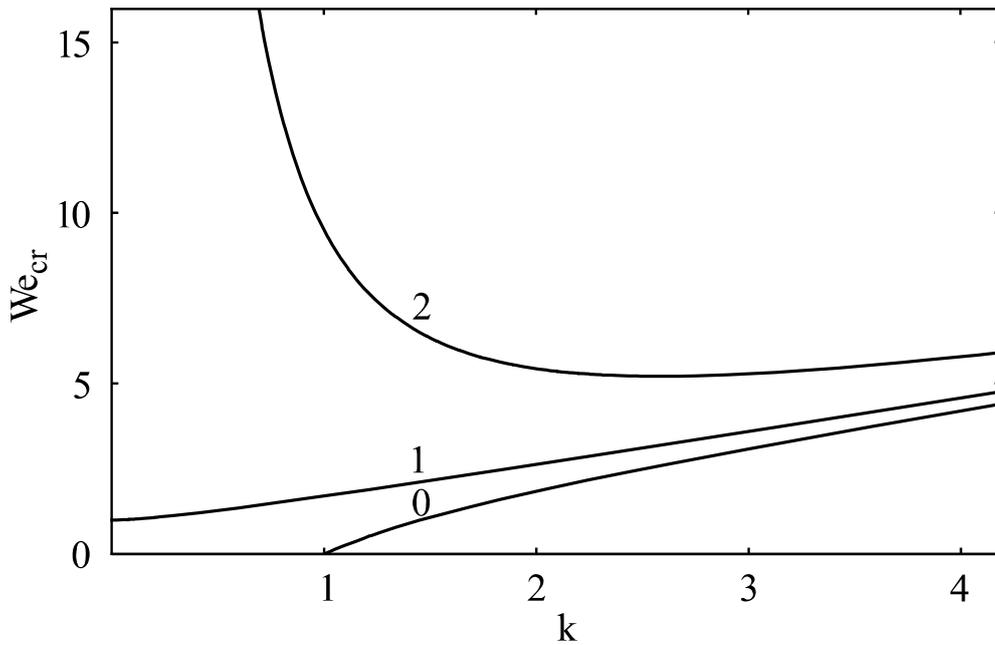


Рис. 4. Зависимости критического значения полевого параметра  $w_{cr}$  от волнового числа  $k$ , рассчитанные при  $\gamma = 72,8$  дин/см;  $\rho_{in} = 1$  г/см<sup>3</sup>;  $R = 2,5$  мм = 0,25 см;  $\rho_{ex} = 0,00129$  г/см<sup>3</sup>;  $We = 0$ ;  $m = 0, 1, 2$ . Номер у кривой совпадает с  $m$ .



**Рис. 5.** Зависимости критического значения параметра Вебера  $We_{cr}$  от волнового числа  $k$ , рассчитанные при  $\gamma = 72,8$  дин/см;  $\rho_{in} = 1$  г/см<sup>3</sup>;  $R = 2,5$  мм = 0,25 см;  $\rho_{ex} = 0,00129$  г/см<sup>3</sup>;  $w = 0$ ;  $m = 0, 1, 2$ . Номер у кривой совпадает с  $m$ .

моды ( $m = 0$ ) одинаков, чего нельзя сказать про изгибную ( $m = 1$ ) и изгибно-деформационную ( $m = 2$ ). Так, при  $k = 0$  изгибная мода для зависимости  $w = w(k)$  возбуждается при как угодно малом значении полевого параметра, для зависимости  $We = We(k)$  носит пороговый характер и при  $We \leq 1,001$  не возбуждается.

Изгибно-деформационная мода имеет пороговый характер для обеих зависимостей:  $w = w(k)$  и  $We = We(k)$ . Но при  $k \rightarrow 0$  эти зависимости ведут себя по разному:  $w(k)$  стремится к конечному пределу, а  $We(k)$  – к бесконечности. Тем не менее, обе зависимости имеют минимумы, при достижении которых параметрами  $w$  или  $We$  реализуется неустойчивость изгибно-деформационной моды: поверхность струи покрывается выступами, с вершин которых вырываются струйки или капельки (как это для электростатической неустойчивости зафиксировано на фотографии в [13], для аэродинамической – в [19]).

В табл. 1 и 2 приведены значения некоторых физических величин, характеризующих неустойчивость первых трех азимутальных мод. Несложно видеть, что для  $m = 2$  электростатическая и аэродинамическая неустойчивости начинаются при различных значениях волновых чисел  $k$ : так, при  $We = 0$  и критическом значении полевого параметра  $w$  величина волнового числа, при котором реализуется электростатическая неустойчивость,  $k_{cr} = 0,789$ , а при  $w = 0$  и критическом значении параметра Вебера  $We$  величина волнового числа, при котором реализуется аэродинамическая неустойчивость,  $k_{cr} = 2,580$ . В ситуации, когда  $w \neq 0$  и  $We \neq 0$ ,

значения волнового числа  $k$ , при которых реализуется смешанная неустойчивость, занимают промежуточные между  $k = 0,789$  и  $k = 2,580$  значения, как это видно из рис. 6. Саму неустойчивость следует именовать электростатически аэродинамической.

На рис. 6 приведены зависимости  $w = w(k)$ , рассчитанные по (3) при различных фиксированных значениях параметра Вебера:  $We = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$  и  $m = 2$ . Из рис. 6 видно, что с увеличением параметра Вебера минимальное значение полевого параметра  $w$ , при котором реализуется смешанная неустойчивость, снижается, а величина волнового числа, при котором реализуется неустойчивость, увеличивается, изменяясь в пределах от  $k = 0,789$  до  $k = 2,580$ .

Следует отметить, что при отсутствии внешней материальной среды, согласно рис. 4 (см. табл. 1), минимальное значение полевого параметра  $w$  для проводящей струи  $\approx 2,904$ , что при переходе к величине напряженности электростатического поля весьма близко к предельному в смысле зажигания коронного разряда у поверхности струи [20]. Так, для критического значения напряженности радиального электрического поля зажигания короны у поверхности цилиндрического проводника радиусом  $r$  (в сантиметрах) Пик установил эмпирическую закономерность [20]:

$$E_{cr} \approx 31 \delta (1 + 0,308 / \sqrt{\delta \cdot r}) \text{ кВ/см};$$

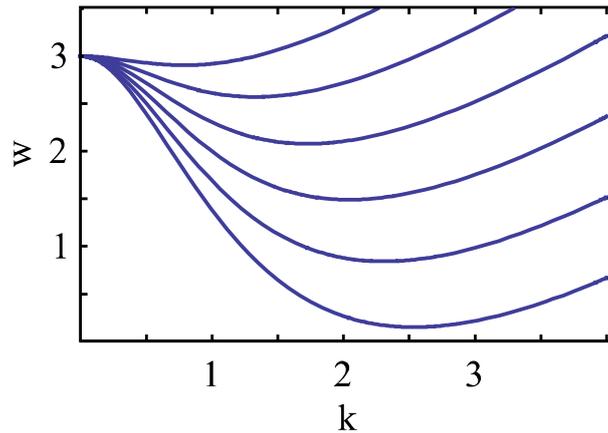
$\delta$  – отношение плотности воздуха к нормальной, соответствующей 760 тор,  $t = 25^\circ\text{C}$ . Из этой формулы следует, что при уменьшении радиуса

**Таблица 1.** Значения некоторых физических величин, характеризующих электрическую неустойчивость первых трех азимутальных мод струи

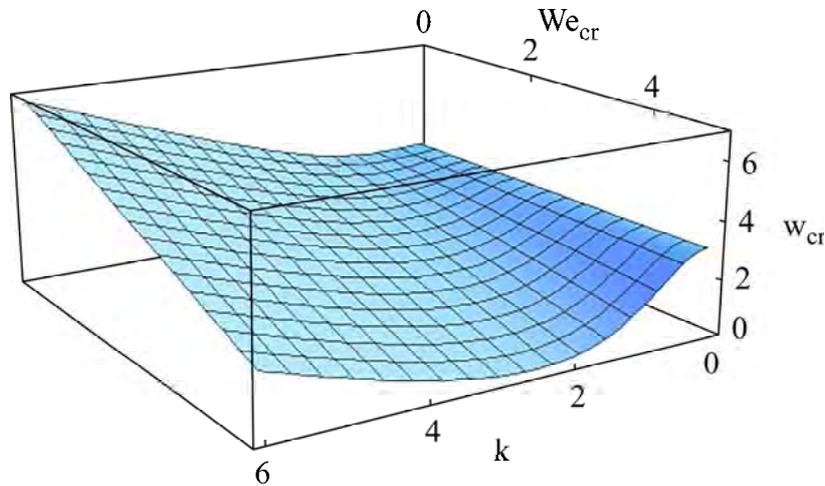
$m$	$E$	$w_{cr}$ , мин	$k_{cr}$	$k_{разм}$	$\lambda_{безразм}$	$\lambda_{разм}$
0						
1						
2	$\approx 31$ кВ/см	2,904	0,789	$\approx 3,16$ 1/см	7,97	$\approx 2$ см

**Таблица 2.** Значения некоторых физических величин, характеризующих аэродинамическую неустойчивость первых трех азимутальных мод струи

$m$	$U$	$We_{cr}$ , мин	$k_{cr}$	$k_{разм}$	$\lambda_{безразм}$	$\lambda_{разм}$
0						
1	$\approx 477$ см/с	1,001	0	0	$\infty$	$\infty$
2	$\approx 1089$ см/с	5,212	2,5801	10,32 1/см	2,44	$\approx 0,61$ см



**Рис. 6.** Зависимости критического для начала реализации электростатически аэродинамической неустойчивости боковой поверхности струи значения параметра  $w_{cr}$  от безразмерного волнового числа  $k$ , построенные при  $m = 2$  и различных значениях параметра  $We$ : сверху вниз  $We = 0; 1; 2; 3; 4; 5$ .



**Рис. 7.** Зависимость критических значений параметров  $w_{cr}$  и  $We_{cr}$  для смешанной электростатически аэродинамической неустойчивости ( $m = 2$ ) от волнового числа  $k$ .

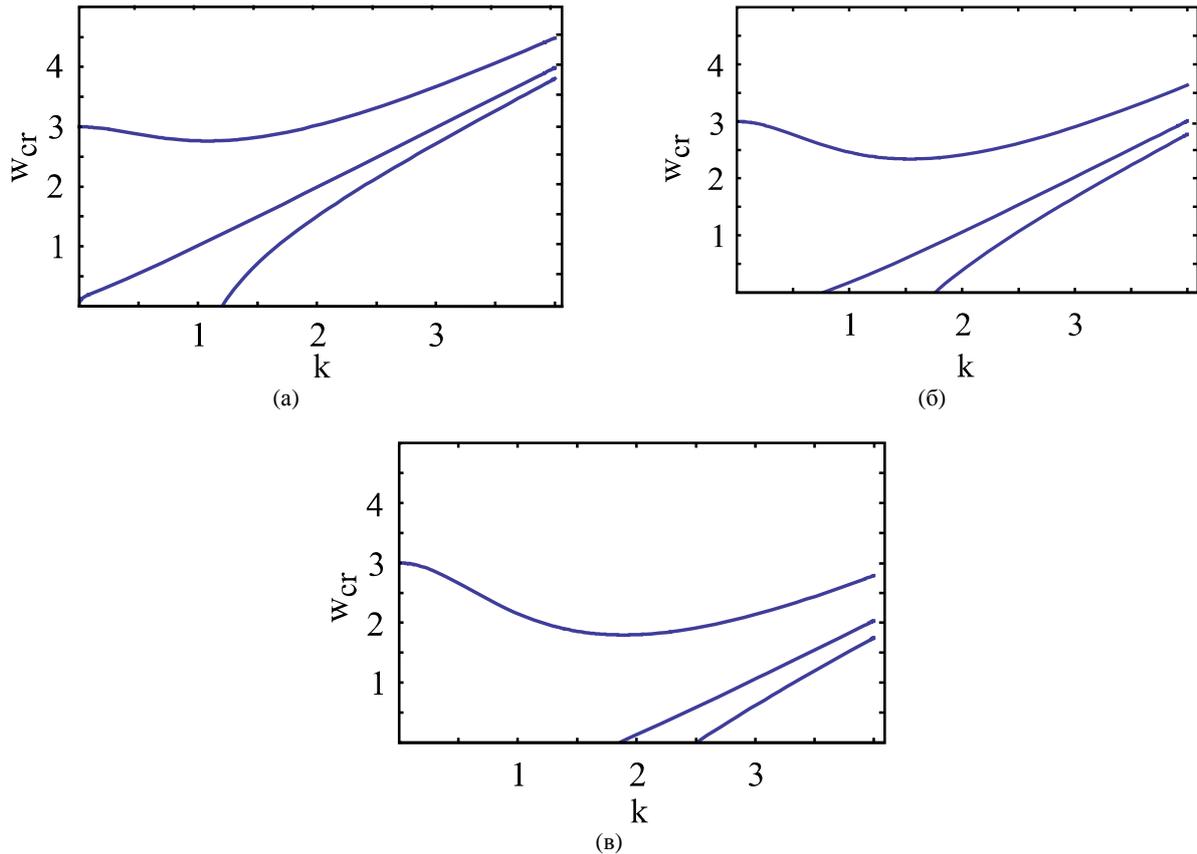
цилиндрического проводника (радиуса струи в нашем случае) критическое значение напряженности электростатического поля зажигания короны увеличивается, а при уменьшении давления в среде – уменьшается.

Согласно сказанному выше, когда и полевой параметр  $w$ , и параметр Вебера  $We$  одновременно отличны от нуля, реализуется смешанная электростатически аэродинамическая неустойчивость. При этом критические значения  $w$  и  $We$

связаны между собой аналитическим соотношением:

$$\frac{k^2}{[\rho_{ex} g_m(k) - h_m(k)]} We = (k^2 + m^2 - 1) + w(1 + h_m(k)). \quad (4)$$

При фиксированном волновом числе  $k$  и заданных прочих физических параметрах согласно (4) связь между критическими значе-



**Рис. 8.** Зависимость критического значения параметра  $w_{cr}$  для смешанной электростатически аэродинамической неустойчивости от волнового числа  $k$ , рассчитанная для  $m = 0, 1, 2$  (нумерация кривых совпадает с такой же на рис. 4 и 5) и фиксированных значений  $We_{cr}$ : (а)  $We = 0,5$ ; (б)  $We = 1,5$ ; (в)  $We = 2,5$ .

ниями  $w$  и  $We$  линейная. В общем случае эта зависимость несколько сложнее, например, при  $m = 2$  и переменном волновом числе  $k$  она приведена на рис. 7. Из (4) и рис. 7 видно, что при фиксированных  $k$  и  $\rho_{ex}$  имеем простую линейную связь:  $w \sim We$ .

Для различных фиксированных значений  $We$  критические кривые приведены на рис. 8 в виде зависимостей  $w_{cr} = w_{cr}(k)$ , из которых видно, что с увеличением  $We$  для азимутальной моды с  $m = 2$  пороговое значение  $w$  снижается и смещается в сторону больших  $k$ ; для  $m = 1$  и  $m = 0$  соответствующие критические кривые смещаются в сторону увеличения  $k$ . При дальнейшем увеличении  $We$  тенденции сохраняются.

Имея в виду возможность получения при электродиспергировании струи заряженных капелек нанометровых размеров, которая может осуществиться при реализации неустойчивости азимутальной моды с  $m = 2$  [3, 9, 10, 12, 14, 19], нужно обратить внимание на смешанную электростатически аэродинамическую неустойчивость, так как она реализуется, если  $We \neq 0$  при меньших (до пробойных [20]:) значениях напряженности внешнего электростатического поля.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Аналитически исследованы закономерности реализации электростатической, аэродинамической и смешанной электростатически аэродинамической неустойчивостей трех первых азимутальных мод жидкой струи. В феноменологическом отношении электростатическая и аэродинамическая неустойчивости поверхности жидкой для первых трех азимутальных мод струи реализуются сходным образом. Критические условия реализации смешанной электростатически аэродинамической неустойчивости зависят от вкладов электростатического и аэродинамического полей.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Левич В.Г. *Физико-химическая гидродинамика*. М.: Физматгиз, 1959. 700 с.
2. Стретт Дж. В. (Лорд Рэлей). *Теория звука*. Т.2. М.: Гостехиздат, 1955. 475 с.
3. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Петрушов Н.А., Волкова М.В. *ЭОМ*. 2010, (4), 23–31.
4. Baily A.G. Electrostatic atomization of liquids (revue). *Sci Prog Oxf*. 1974, **61**, 555–581.
5. Ентов В.М., Ярин А.Л. *Итоги науки и техники. Серия: Механика жидкости и газа*. 1984. **17**, 112–197.

6. Eggers J. *Rev Mod Phys.* 1997, **69**(3), 865–929.
7. Аметистов Е.В., Блаженков В.В., Городов А.К. и др.: *Монодиспергирование вещества: принципы и применение*. Под ред. В.А. Григорьева. М.: Энергоатомиздат, 1991. 336 с.
8. Pfeifer R.J. *Phys Fluids.* 1973, **16**(3), 454–455.
9. Cloupeau M., Prunet Foch B. *J Electrostat.* 1990, **25**, 165–184.
10. Cloupeau M., Prunet Foch B. *J Aerosol Sci.* 1994, **25**(6), 1021–1035.
11. Shiryayeva S.O., Grigor'ev A.I. *J Electrostat.* 1995, **34**, 51–59.
12. Jaworek A., Krupa A. *J Aerosol Sci.* 1999, **30**(7), 873–893.
13. Григорьев А.И., Ширяева С.О. *ЭОМ.* 2018, **54**(2), 23–37
14. Kim O.V., Dunn P.F. *Langmuir.* 2010, **26**, 15807–15813.
15. Френкель Я.И. *ЖЭТФ.* 1936, **6**(4), 348–350.
16. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Электродинамика сплошных сред*. М.: Наука, 1975. 532 с.
17. Абрамовиц М., Стиган И. *Справочник по специальным функциям*. М.: Наука, 1979. 830 с.
18. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Гидродинамика*. М.: Наука, 1986. 733 с.
19. Hoyt J.W., Taylor J.J. *J Fluid Mech.* 1977. **83** (Part 1), 119–127.
20. Райзер Ю.П. *Физика газового разряда*. М: Наука, 1987. 592 с.

#### Summary

It is shown that the instability of a liquid jet in relation to an external electric field and its instability in relation to the presence of an external material medium at the existence of common phenomenological features differ by threshold values of the field parameter and the Weber parameter, at which a specified instability is realized for the first two values of the azimuthal mode. For the next, a bending-deformation mode in the ascending order of number, both instabilities have thresholds that differ only in the values of the wave numbers at which they are realized. For the mixed electric-aerodynamic instability, when both and the Weber parameters are different from zero, both the instability implementation thresholds and critical wave number change.

*Keywords:* liquid jet, radial electric field, material medium, instability, azimuthal number