К выводу уравнений гидро- и электрогидродинамики методом анализа размерностей

Ф. П. Гросу, *М. К. Болога

Институт прикладной физики,
г. Кишинев, MD-2028, Молдова, **e-mail:* mbologa@phys.asm.md

Поступила 04.09.2018
После доработки 09.11.2018
Принята к публикации 09.11.2018

Изложена идея применения анализа размерностей в целях решения некоторых задач гидродинамики, связанных с конвективным переносом жидкой среды. В частности, на этой основе выведены уравнения: неразрывности, теплопроводности, диффузии, движения идеальной (Эйлера) и вязкой жидкостей (Навье-Стокса) с некоторыми дополнениями из области электрогидродинамики. Кроме того, методом размерностей решен вопрос о наличии двух сил вязкого трения: скольжения и деформации (при «сжатии-растяжении» в сжимаемой жидкости). Найдены формулы для этих сил.

Ключевые слова: конвективный перенос, уравнения неразрывности, движения, теплопроводности, диффузии, электрогидродинамики, силы вязкости.

УДК 537.527.3
DOI: 10.5281/zenodo.2551252

ВВЕДЕНИЕ

В задачах гидродинамики, теплообмена и их усложненных вариантах, например электрическими полями (*электрогидродинамика* – ЭГД), непременно сталкиваемся с понятием конвективного переноса [1], когда физическая величина меняется со временем в данной точке пространства (локально) и наряду с этим – за счет движения жидкости. Суммарное изменение в единицу времени рассматриваемой величины (обозначим ее $F(t, x(t), y(t), z(t))$ определится полной производной сложной функции (скалярной или векторной) по времени [2]:

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}= \\ =\frac{\partial F}{\partial t}+(\vec{v},\nabla)F=\frac{\partial F}{\partial t}+(\vec{v},\mathrm{grad})F, \quad (1)$$

где $\vec{v}\left(v_x,v_y,v_z\right)$– поле скоростей, компоненты которых равны производным по времени от координат. Ставится задача: установить уравнение для функции $F(t, x(t), y(t), z(t))$ на основе физических соображений и неявного вида его правой части. Представляются следующие случаи, когда эта задача разрешима сравнительно не сложно методами теории размерностей. Это – вывод основных уравнений гидродинамики: неразрывности жидкости, конвективной теплопроводности, диффузии, движения *вязкой* жидкости Навье-Стокса – особенно важный случай, ибо вывод именно этих уравнений наталкивается на наибольшие трудности, в частности, касающиеся *двух сил вязкости* [2]. На перечисленных уравнениях и сосредоточим внимание, предварительно кратко остановившись на вопросах постановки задач и сущности предлагаемого подхода.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ И СУЩНОСТЬ ИХ РЕШЕНИЯ

Затронутые вопросы, помимо методологического значения, представляют и научно-познавательный интерес, что неоднократно демонстрировалось теорией подобия и размерностей [3] при решении сложных и разнообразных классических задач механики жидкости и газа [4–6]. Методом размерностей и подобия решается большое многообразие физических вопросов и задач [7–10]. В частности, проводится углубленное рассмотрение аспектов размерного анализа и моделирования [7], включая обширный выбор примеров из различных областей науки и техники. Рассматривается анализ размерностей как основа для проведения параллелей между системами разного физического масштаба [8], что дает ключевое представление о природных явлениях, слишком обширных, чтобы быть проведенными в лабораторных условиях. Известно, что центральное место в теории размерностей и подобия занимает П-теорема, которой посвящена работа [9] и в которой делается акцент на проблемах, характерных для тепломассопереноса в твердых телах, а также в ламинарных и турбулентных потоках жидкостей и газов. Детальное рассмотрение аспектов размерного анализа и моделирования предпринято в [10], в котором приведено большое количество примеров из различных процессов переноса. Используется анализ размерностей для физической трактовки силы гидродинамического сопротивления, испытываемой твердым телом при его движении в жидкости, а также для объяснения закономерностей потока жидкостей через трубы, тепломассопереноса в твердых телах. Работа [11] охватывает методы и историю развития этой области знаний, включая физические и инженерные приложения, рассматривающие вопросы от механики, гидро- и электродинамики до термодинамики и квантовой физики, объясняя такие понятия, как вязкость и диффузия посредством конкретных примеров и задач. Связующим звеном между гидродинамическим полем скоростей $\vec{v}$ и полем искомой величины F, как видно из (1), служит оператор дифференцирования по координатам *«набла»*∇:

$$\nabla \equiv \vec{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\cdot\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\cdot\frac{\partial}{\partial z},$$

поэтому с точки зрения размерностей искомая правая часть (1) должна содержать величины, отражающие размерность полной производной (1), в том числе данного оператора, то есть решение уравнения (1) будем представлять в неявном виде:

$$\frac{\partial F}{\partial t}+(\vec{v},\nabla)F=\mu\cdot f(\nabla,F,\vec{v},\gamma,p,...), \qquad (2)$$

где γ и p – массовая плотность и давление; многоточие означает, что допускаются и другие независимые переменные с учетом характера поставленной задачи, например, напряженность электрического поля $\vec{E}$ из области ЭГД. Если правая часть (2) равна нулю, то величина F равна постоянной, например, как в случае изоэнтропийного течения жидкости [2]:

$$\frac{dS}{dt}=\frac{\partial S}{\partial t}+(\vec{v},\nabla)S=0\Rightarrow S=\mathrm{const}.$$

В противном случае каждой функции f отвечает решение какой-то математической задачи, в частности, обладающей физическим смыслом. Поэтому применим и метод «пробных функций», которые можно подобрать, требуя соблюдения размерностей правой части (2) соответственно левой. Параметр μ (размерный или безразмерный) написан для общности, являясь поправочным, и уточняется из физических соображений в процессе анализа размерностей. Представив уравнения (2) согласно теории размерностей и подобия [3] в виде степенных множителей, в том числе и по оператору «набла» ∇,

$$\begin{aligned}&\mu\cdot f(\nabla,F,\vec{v},...)=\mu\cdot\nabla^k\cdot F^l\cdot\vec{v}^{\,m}\cdot,...\Rightarrow\\&\Rightarrow[(\vec{v},\nabla F)]=[\mu]\cdot[\nabla]^k\cdot[F]^l\cdot[\vec{v}]^m...\end{aligned} \qquad (3)$$

и приравняв показатели степеней слева и справа последнего равенства (3) с учетом (2), получим систему уравнений, решая которую выявим явный вид правой части (2). Полученные результаты и возможные произведения (скалярные, векторные и др.) подвергаем анализу, сделав выводы относительно структуры правой части уравнения (2) и его аспекта в целом.

В равенствах (2) и (3), а также в вышеизложенном и состоит сущность предлагаемого метода. Рассмотрим примеры.

1. Уравнение сохранения массы (неразрывности)

Ищем уравнение для полной производной от массовой плотности гомогенной жидкости в общем виде (2):

$$\frac{d\gamma}{dt}=\frac{\partial\gamma}{\partial t}+(\vec{v},\nabla)\gamma=\mu\cdot f(\nabla,\gamma,\vec{v},p), \qquad (4)$$

предполагая, что от внешнего электрического или гравитационного поля плотность не зависит (эти поля отсутствуют). Задачу решим сначала согласно общей схеме (2), (3), ограничившись для правой части (4) указанными в скобках переменными:

$$\begin{aligned}&T^{-1}\cdot(M\cdot L^{-3})=\mu\ f(\nabla,\gamma,\vec{v},p)=\mu\nabla^k\cdot\gamma^l\cdot v^m\cdot p^n=\\&=\mu L^{-k}\cdot(M^l\cdot L^{-3l})\cdot(L^m\cdot T^{-m})\cdot(M^n\cdot L^{-n}\cdot T^{-2n}).\end{aligned} \qquad (5)$$

Приравняв показатели степеней слева и справа этого равенства, получим систему:

$$\begin{cases}-3l+m-n=k-3,\\ l+n=1,\\ m+2n=1.\end{cases} \qquad (6)$$

Эта система совместна, однако, имея бесчисленное множество решений, лишь для $к$ = 1. Следовательно, в равенствах (5) можно положить $к$ = 1, тем самым превратив систему (6) в неопределенную, а затем в определенную с приемлемым набором неизвестных: $l = m = 1$; $n = 0$, ибо только этот набор приводит к физически оправданным результатам. При данном наборе переменных правая часть искомой зависимости (5) допускает два вида структурно-равносильных по соображениям размерностей произведения: $\mu\gamma(\nabla\cdot\vec{v})$ либо $\mu\cdot\nabla(\gamma\vec{v})$. Первая форма при $\mu = -1$ полностью удовлетворяет нашему поиску, приведя к общеизвестному закону сохранения массы:

$$\frac{d\gamma}{dt}=\frac{\partial\gamma}{\partial t}+(\vec{v},\nabla)\gamma=-\gamma(\nabla,\vec{v}). \qquad (7)$$

Отсюда автоматически следует уравнение неразрывности для наиболее распространенного его стандартного вида:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}+\nabla\vec{i}=0,$$

где

$$\vec{i}=\gamma\vec{v}$$

– плотность потока массы. Чтобы убедиться в том, что (5) действительно является уравнением неразрывности, достаточно проинтегрировать его с учетом теоремы Гаусса-Остроградского: $\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V\gamma\cdot dV=-\oint\limits_S\vec{i}\cdot d\vec{S}$;

– закон сохранения массы в наглядной интегральной форме. По второму способу сразу можно было проверить в качестве пробной функции выражение $(-\gamma\cdot(\nabla,\vec{v}))$, убедившись, что оно удовлетворяет всем требованиям задачи. Легко увидеть, что другие решения, например $\nabla(\gamma\vec{v})$, этим требованиям не соответствуют.

2. Уравнение конвективной теплопроводности

Уравнение конвективной теплопроводности – это уравнение, связывающее изменение температуры единицы объема жидкости в единицу времени с полями скоростей $\vec{v}$ и температуры T в окрестности выделенной частицы жидкости. В упрощенном варианте вывода изменение количества *тепла* единицы объема внутри частицы ввиду причин, вызывающих это изменение (теплопроводности), будет пропорционально коэффициенту теплопроводности λ (μ ≡ λ) и некоторой функции, содержащей оператор ∇, температуру T, скорость $\vec{v}$ и давление p. Причем для начала пренебрегаем наличием силовых полей:

$$c_p\cdot\gamma\cdot\frac{dT}{dt}=\lambda\cdot f(\nabla,T,\vec{v},p),\qquad(8)$$

где c_p – удельная теплоемкость жидкости при постоянном давлении, а полная производная от температуры по времени слева (8) согласно (1) равна:

$$\frac{dT}{dt}=\frac{\partial T}{\partial t}+(\vec{v},\nabla)T.\qquad(9)$$

Поделив (8) на произведение коэффициента теплоемкости c_p и плотности γ, с учетом (9), придаем уравнению (8) более простой вид и несколько другой физический смысл:

$$\frac{\partial T}{\partial t}+(\vec{v},\nabla)T=a\cdot f(\nabla,T,\vec{v},p),\qquad(10)$$

где появился новый коэффициент a с размерностью м^2/с, называемый коэффициентом температуропроводности ввиду того, что характеризует быстроту выравнивания *температурных* (в отличие от тепловых) полей:

$$a\equiv\lambda/(c_p\cdot\gamma).\qquad(11)$$

Составим уравнение размерностей для уравнения (10), предварительно заметив, что из (10) давление p выпадет, так как соответствующие единицы измерения слева в (10) отсутствуют. Тогда, положив $f(\nabla,T,\vec{v})=\nabla^m\cdot T^n\cdot\vec{v}^l$:

$$\begin{aligned}&[dT/dt]=[a]\cdot[\nabla]^m\cdot[T]^n\cdot[v]^l\Rightarrow\theta\cdot T^{-1}=\\&=L^2\cdot T^{-1}\cdot L^{-m}\cdot\theta^n\cdot L^l\cdot T^{-l}\Rightarrow m=2;n=1;l=0,\end{aligned}\qquad(12)$$

где введена новая единица измерения для температуры θ. Возвращаясь к равенствам (9) и (10) с учетом (12), получим:

$$\frac{\partial T}{\partial t}+(\vec{v},\nabla)T=a\cdot\nabla^2T.\qquad(13)$$

Легко заметить, что других вариантов для правой части (13) нет, что следует из однозначности решения для показателей степеней (12). Кажущийся непротиворечивым вариант $(\nabla\times\nabla)T$ = = rot(grad$T$) ≡ 0 на самом деле противоречивый, так как носит векторный характер и приводит к тождественному нулю. Остается добавить, что если в жидкости имеются внутренние источники тепла, например в виде электрического тока, как в задачах ЭГД, то, очевидно, их мощность следует добавить в правую часть уравнения (13), следовательно, в задачах ЭГД (при наличии внешнего электрического поля) [6] уравнение (13) примет более общий вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t}+(\vec{v},\nabla)T=a\cdot\nabla^2T+\sigma E^2/(c_p\cdot\gamma),\qquad(14)$$

где σ – удельная электропроводность жидкости; E – напряженность электрического поля.

3. Уравнение конвективной диффузии

Роль искомого поля играет массовая концентрация диффундирующего вещества c, находящегося в несущей жидкой фазе, и по аналогии с (10) можем написать:

$$\frac{\partial c}{\partial t}+(\vec{v},\nabla)c=D\cdot f(\nabla,c,\vec{v}),\qquad(15)$$

где коэффициентом переноса, аналогом коэффициента a, является коэффициент диффузии μ ≡ D, измеряющийся также в (м^2/с). Следует заметить, что в задачах по электрической очистке диэлектрической жидкости от полупроводящих и проводящих примесей с помощью электрического поля [12] были введены понятия «электрической» диффузии и соответственно коэффициента «электрической» диффузии D_e, который следовало бы учесть в (15) в случае электрической очистки. В выражении (15) не фигурирует давление p по той же причине, по которой оно выпало из (10). Подразумевая в (16) под θ размерность концентрации и составив уравнение размерностей для уравнения (19), получим:

$$[dc/dt] = [D]\cdot[\nabla]^m\cdot[c]^n\cdot[v]^l \Rightarrow \tilde{k}\cdot T^{-1} = \\ = L^2\cdot T^{-1}\cdot L^{-m}\cdot\tilde{k}^n\cdot L^l\cdot T^{-l} \Rightarrow m=2;\, n=1;\, l=0, \quad (16)$$

где через $\tilde{k}$ обозначена единица измерения концентрации c. Следовательно, уравнение конвективной диффузии (15) с учетом (16) примет общеизвестный вид:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + (\vec{v},\nabla)c = D\cdot\nabla^2 c. \quad (17)$$

4. Уравнения движения жидкости

Первоначальным толчком к получению уравнений движения жидкости служит II закон Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F}. \quad (18)$$

Заменив массу частицы m на ее плотность γ, то есть на массу единицы объема, ускорение – на полное ускорение в соответствии с формулой (1), получим:

$$\gamma\cdot[\partial\vec{v}/\partial t + (\vec{v},\nabla)\vec{v}] = \vec{f}, \quad (19)$$

где в общем случае под $\vec{f}$ следует подразумевать векторную сумму всех плотностей сил, действующих на данную частицу жидкости, в том числе объемных сил внешних силовых полей, действующих на жидкость. Сущность получения уравнений движения состоит в выявлении явного вида этих сил. Так, в поле сил давления, забегая вперед, укажем, что их объемная плотность равна:

$$\vec{f}_p = -\nabla p \quad (20)$$

– единственная векторная комбинация оператора *набла* и давления с требуемой размерностью Н/м^3. Знак «–» имеет прозрачный физический смысл: сила давления направлена в сторону убывания давления. Заметим еще одно специфическое свойство плотности сил давления: она «формируется» в процессе движения жидкости, поэтому определяется гидродинамическими и силовыми факторами, являясь в уравнениях гидродинамики *искомой* величиной наряду со скоростью или температурой. Последовательности ради формулу (20) получим ниже по общим правилам (3). Плотность сил гравитационного поля определяется очевидной формулой, не требующей комментариев:

$$\vec{f}_g = \gamma\cdot\vec{g}. \quad (21)$$

За последние десятилетия свои научные позиции закрепила электрическая гидродинамика, изучающая гидромеханическое поведение диэлектрических и слабопроводящих жидкостей в электрических полях. В случае ЭГД взаимодействие среды с электрическим полем осуществляется, как правило, чисто кулоновскими силами, вполне аналогичными (21) и равными:

$$\vec{f}_E = \rho\cdot\vec{E}, \quad (22)$$

где ρ – объемная плотность свободных электрических зарядов в среде; $\vec{E}$ – вектор напряженности электрического поля. Особенно просто выглядит кулоновская сила (22) в случае коронного разряда, то есть в условиях униполярной электропроводимости, когда

$$\vec{j} = k\rho\vec{E} \Rightarrow \vec{f}_E = \rho\vec{E} = \vec{j}/k, \quad (23)$$

где $\vec{j}$ – плотность тока; k – подвижность ионов знака коронирующего электрода, то есть составляющей носителей, обеспечивающих ток. Выражения (20)–(23) могут порознь или совместно фигурировать в правой части уравнения (19), правда, в случае электрических сил дополненные уравнениями электрического поля (Максвелла). И эти силы не требуют своего вывода. В простейшем случае идеальной жидкости вывод уравнения движения состоит в замене правой части (19) выражением (20) и т.д. Основная трудность заключается в учете сил вязкости при наличии вязкой жидкости. Наша цель – решить эту задачу методом размерностей, и хотя для идеальной жидкости приведено решение (19) с «автоматической» правой частью (20), с целью последовательности выведем и уравнения для этого случая в соответствии с предлагаемой методикой.

4.1. Уравнения движения идеальной жидкости Эйлера

Предполагается, что жидкость находится только под воздействием поля сил давления, значит, для того чтобы написать уравнение движения, следует в (19) найти плотность сил давления $\vec{f}$, действующих на единицу объема. В результате получим уравнение движения жидкости общего вида:

$$\gamma\,[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v},\nabla)\vec{v}] = \vec{f}_p.$$

Силу давления со стороны окружающей частицу жидкости на основе тех же соображений размерностей ищем в виде (размерность частной производной опущена):

$$\left[\gamma\left(\vec{v}\,\nabla\right)\vec{v}\right] = \left[f_p = f_p\left(\nabla, p, \vec{v}\right)\right] = \\ = \mu\cdot\nabla^m\cdot p^n\cdot v^1 \to -\nabla p. \quad (24)$$

Подставляя в эту формулу соответствующие размерности, легко получить: $m = 1$; $n = 1$; $l = 0$

и прийти к уже приведенной формуле (20) при μ = –1, в чем легко убедиться интегрированием формулы по объему и использованием теоремы Гаусса-Остроградского. Из (24) получим уравнение движения идеальной жидкости Эйлера:

$$\gamma\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v},\nabla)\vec{v}\right]=-\nabla p. \qquad (25)$$

В электрическом и гравитационном полях к правой части (25) следует добавить плотность сил тяжести $\gamma\vec{g}$ [2] и электрических $\rho\cdot\vec{E}$ [6]:

$$\gamma\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v},\nabla)\vec{v}\right]=-\nabla p+\gamma\vec{g}+\rho\vec{E}. \qquad (26)$$

4.2. Уравнения движения вязкой жидкости. Две силы вязкости

Сущность уравнения Навье-Стокса, к выводу которого приступаем, состоит в том, что оно учитывает силу вязкого трения между слоями жидкости в виде:

$$\vec{f}'=\vec{f}'(\eta,\nabla,\vec{v},p)=\eta\cdot\nabla^m\cdot\vec{v}^n\cdot p^k, \qquad (27)$$

где справа задействованы только величины, де-факто присущие правой части (2); μ ≡ λ – коэффициент динамической вязкости. В соответствии с правилами размерностей подставляем размерности в (27) и находим *m, n* и *к* приравниванием соответствующих показателей степеней с обеих сторон равенства:

$$[\vec{f}]=M\cdot L^{-2}\cdot T^{-2};\ [\eta]=M\cdot L^{-1}\cdot T^{-1};[\nabla]=L^{-1};$$
$$[\vec{v}]=L\cdot T^{-1};\ [p]=M^k\cdot L^{-k}\cdot T^{-2k},$$

и получим:

$$M\cdot L^{-2}\cdot T^{-2}=M\cdot L^{-1}\cdot T^{-1}L^{-m}\cdot\left(L\cdot T^{-1}\right)^n$$
$$M^k\cdot\left(L^{-1}\cdot T^{-2}\right)^K\Rightarrow m=2;\ n=1;\ k=0. \qquad (28)$$

Следовательно, согласно (27) решением задачи будет:

$$\vec{f}'=\eta\cdot(\nabla,\nabla)\vec{v}=\eta\cdot\nabla^2\vec{v}, \qquad (29)$$

известное выражение для силы вязкости жидкости. Легко заметить, что, заменив в (27) давление на плотность, получим тот же результат (29), что, по-видимому, говорит о слабой зависимости сил вязкости от давления и плотности вообще. Однако формуле (27) соответствует и другое выражение – для другой двукратной аппликации оператора ∇, приводящей к понятию *второй вязкости* [2, 4, 5], с другим коэффициентом переноса ζ, но той же размерности, что и η:

$$\vec{f}''=\zeta\cdot\nabla(\nabla,\vec{v})\equiv\zeta\cdot\mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\vec{v}). \qquad (30)$$

Той же размерностью будет и двойное векторное произведение, которое, однако, по известному тождеству векторного анализа распадается на два предыдущих произведения:

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{v})=\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{v})\equiv\nabla\cdot(\nabla,\vec{v})-\nabla^2\vec{v}, \qquad (31)$$

не дающих новых вкладов в уравнение движения, ибо они уже охвачены формулами (29) и (30). Таким образом, задача исчерпана, суммарная сила трения определится в соответствии с формулами (29), (30) суммой:

$$\vec{f}_{tr}=\eta\cdot\nabla^2\vec{v}+\zeta\cdot\nabla(\nabla,\vec{v}), \qquad (32)$$

и, следовательно, решен вопрос о двух силах вязкости: одна – связанная с трением скольжения слоев жидкости друг относительно друга и описываемая лапласианом скорости, другая – обусловленная трением, которое возникает в процессе сжатия или растяжения жидкости, и выражаемая через дивергенцию скорости, а потому для несжимаемой жидкости исчезающая.

Подробный математический вывод этого равенства на основе тензорного анализа (см., например, [4]) показывает, что в (30)

$$\zeta=\xi+\eta/3, \qquad (33)$$

где ξ – специфический коэффициент трения объемной деформации в отсутствие скольжения (при η = 0) и называется *вторым* коэффициентом вязкости [2]. Однако для несжимаемой жидкости, то есть в наиболее часто встречаемом на практике случае, коэффициент ξ не играет роли, поскольку он выпадает из общей системы уравнений ввиду $\nabla\vec{v}\equiv\mathrm{div}\,\vec{v}=0$. В общем же случае справедливо уравнение Навье-Стокса в виде [2]:

$$\gamma\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v},\nabla)\vec{v}\right]=$$
$$=-\nabla p+\vec{f}+\eta\cdot\nabla^2\vec{v}+(\xi+\eta/3)\cdot\nabla(\nabla,\vec{v}), \qquad (34)$$

где основные выводы, трудности были преодолены соображениями размерностей. В (34) $\vec{f}$ – объемная плотность внешних сил, например, гравитационного или электростатического поля.

ВЫВОДЫ

1. Изложена общая идея применения анализа размерностей в целях вывода уравнений гидро- и электрогидродинамики.

2. На этой основе выведены уравнения: неразрывности, теплопроводности, диффузии, движения идеальной (Эйлера) и вязкой жидкостей (Навье-Стокса).

3. Методом размерностей решен вопрос о наличии двух сил вязкого трения: скольжения и деформации (при «сжатии-растяжении» в

сжимаемой жидкости). Найдены компактные формулы для этих сил.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лыков А.В. *Тепломассообмен*. Справочник. М.: Энергия, 1978. 463 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Гидродинамика. Теоретическая физика*. Т. 6. М.: Наука, 1986. 736 с.
3. Седов Л.И. *Методы подобия и размерности в механике*. М.: Наука, 1977. 440 с.
4. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. *Теоретическая гидромеханика. Ч. 2*. М.: Физматгиз, 1963. 728 с.
5. Лойцянский Л.Г. *Механика жидкости и газа*. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
6. Болога М.К., Гросу Ф.П., Кожухарь И.А. Электроконвекция и теплообмен. Кишинев: Штиинца, 1977. 319 с.
7. Szirtes T., Rozsa P. *Applied Dimensional Analysis and Modeling*. Amsterdam, Boston: Elsevier Science & Technology Books, 2006. 820 p.
8. Bolster D., Hershberger R.E., Donnelly R.J. *Phys Today*. 2011, **64**(9), 242–247.
9. Yarin L.P. *The Pi-Theorem: Applications to Fluid Mechanics and Heat and Mass Transfer*. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2012. 332 p.
10. Jensen J.H. *Am J Phys*. 2013, **81**, 688–694. doi: 10.1119/1.4813064.
11. Lemons D.S. *A student's guide to dimensional analysis*. Cambridge University Press, 2017. 209 p.
12. Гросу Ф.П., Болога М.К., Леу В.И., Болога Ал.М. *ЭОМ*. 2012, **48**(2), 72–78.

Summary

The idea of applying dimensional analysis to solve some problems of hydrodynamics associated with convective transport of a liquid medium is presented. In particular, it is the base for deriving equations of continuity, thermal conductivity, diffusion, motion of the ideal (Euler) and viscous fluid (Navier-Stokes), with some supplements from the field of electrohydrodynamics. In addition, the problem of the presence of two forces of viscous friction is solved, those of sliding and deformation (in the case of "compression-stretching" in a compressible fluid). Formulas for these forces are derived.

Keywords: convective transfer, equations of continuity, motion, heat conduction, diffusion, electrohydrodynamics, viscosity forces.