

Нелинейные деформации и нелинейные волны на заряженных поверхностях цилиндрических струй

* А. И. Жакин, ** А. Е. Кузько

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования «Юго-Западный государственный университет»,
г. Курск, 305040, Россия, *e-mail: zhakin@mail.ru, **e-mail: kuzko@mail.ru

Поступила 13.09.2018

После доработки 03.10.2018

Принята к публикации 03.10.2018

Излагаются результаты теоретических исследований воздействия электрического поля на цилиндрическую струю диэлектрической жидкости с быстрой релаксацией зарядов в слабо нелинейном приближении. Показано, что на свободной поверхности могут образовываться локализованные и периодические нелинейные деформации и волны. Изучено поведение свободной поверхности струи при изменении напряженности электрического поля.

Ключевые слова: жидкий диэлектрик, поляризация, проводимость, нелинейные волны, солитон.

УДК 537.58

DOI: 10.5281/zenodo.2551242

ВВЕДЕНИЕ

Изучение заряженных цилиндрических струй вызывает интерес как с теоретической, так и с практической точек зрения [1–4]. С практической точки зрения исследование связано со стабилизацией струй от распада, а с теоретической с влиянием кривизны на нелинейные эффекты [1, 5, 6]. Пример использования эффекта стабилизации электрическим полем цилиндрической многослойной струи приведен на рис. 1, заимствованном из работы [3].

В данной работе на основе методики нелинейного анализа, предложенной в работе [7], дается анализ нелинейных эффектов поверхности заряженной цилиндрической струи в осесимметричном случае. По существу, данное исследование является продолжением работы [8], распространенное на случай криволинейной (цилиндрической) поверхности. Показано, что на поверхности цилиндрической струи образуются локализованные нелинейные образования солитонного типа, которые ведут себя подобно частицам. Проведенный анализ позволяет выработать рекомендации устойчивости струй относительно конечных возмущений.

ФОРМУЛИРОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Рассматриваются две несмешивающиеся несжимаемые жидкости (одна из которых может быть газом), разделенные свободной поверхностью раздела (рис. 2). Формулировка основной системы уравнения и граничных условий должна учитывать вязкость и проводимость жидкостей, а также физико-химические свойства поверхности

раздела. Однако в длинноволновом приближении эффектами вязкости можно пренебречь, поэтому далее будем использовать модель идеальной жидкости. Вычисления проводим для двух невязких идеальных жидких диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями ε_i и при потенциальном течении $\vec{V}_i = \nabla\psi_i$ ($i = 1, 2$).

Сформулируем краевую задачу в безразмерных переменных. Введем априори амплитуду отклонения поверхности a и характерный горизонтальный масштаб λ , совпадающий по порядку с длиной волны возмущений. Аналитические выражения для этих параметров будут даны после вывода соответствующих уравнений. Коэффициент поверхностного натяжения и напряжение на электродах обозначим как α , U соответственно. Нелинейные волны и деформации будем изучать по отношению к осесимметричным возмущениям. Этот случай интересен тем, что здесь 1) применима методика решения [7, 8]; 2) во многих случаях неустойчивость развивается именно по отношению к осесимметричным возмущениям. В этом случае безразмерные переменные определяются как

$$r' = r/R, \quad x' = x/\lambda, \quad f' = f/a, \quad \Phi' = \Phi/U, \quad (1)$$

$$\psi' = \psi/\psi_0, \quad \psi_0 = \lambda c_0, \quad c_0 = \sqrt{\alpha/(\rho_2 R)},$$

Система уравнений относительно безразмерных функций (штрихи опускаем) имеет вид:

$$(\Omega_i): \hat{L}\Phi_i = \hat{L}\psi_i = 0, \quad \hat{L} = \frac{\partial^2}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} + \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \quad (i = 1, 2); \quad (2)$$

$$r = r_1: \Phi = 0, \quad \psi_{1r} = 0; \quad r = r_2: \psi_{2r} = 0; \quad (3)$$

$$r = 1 + \varepsilon f: \Phi = 1, \quad (4)$$

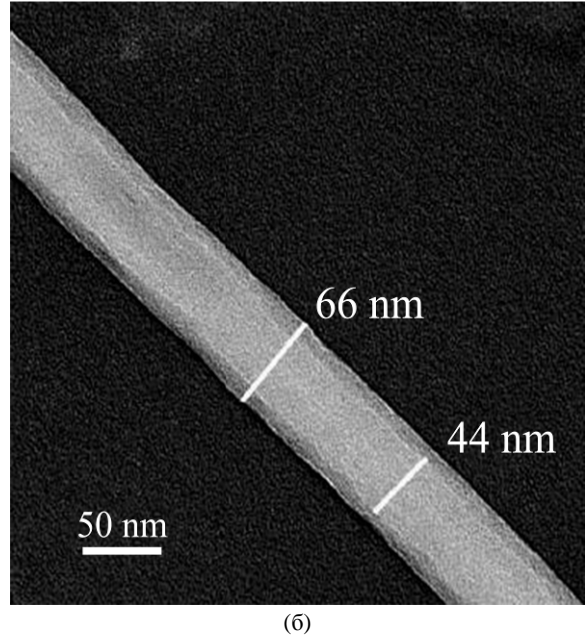
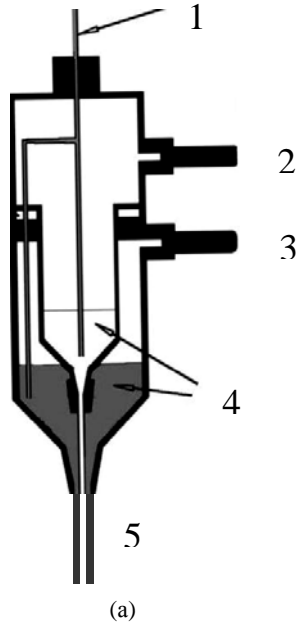


Рис. 1. (а) – схема установки для получения микротрубок или двухслойных микронитей [3]: 1 – электрод; 2, 3 – вход воздуха для создания давления; 4 – внутренняя и внешняя полимерные жидкости; 5 – выход; (б) – пример изделия.

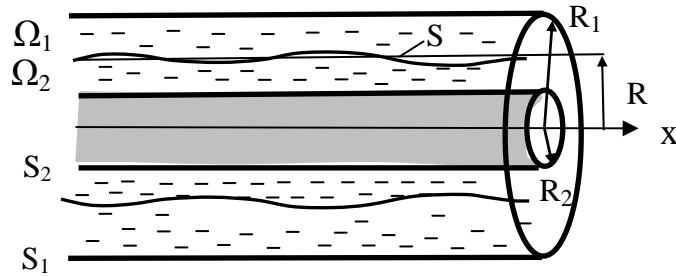


Рис. 2. Геометрия исследуемых сред: S – свободная поверхность раздела двух жидкостей; S_1, S_2 – электроды.

$$\varepsilon f_t = \frac{1}{\mu^2} \Psi_{1r} - \varepsilon \Psi_{1x} f_x = \frac{1}{\mu^2} \Psi_{2r} - \varepsilon \Psi_{2x} f_x, \quad (5)$$

$$\langle \rho \Psi_t \rangle + \frac{1}{2\mu^2} \langle \rho |\nabla \Psi|^2 \rangle + \frac{W}{2} E^2 + \varepsilon \mu^2 H_1 - H_2 = C(t), \quad (6)$$

$$H_1 = \frac{f_{xx}}{(1 + \varepsilon^2 \mu^2 |f_x|^2)^{3/2}},$$

$$H_2 = \frac{1}{(1 + \varepsilon f)(1 + \varepsilon^2 \mu^2 |f_x|^2)^{1/2}}.$$

Здесь и в дальнейшем нижние буквенные индексы обозначают соответствующие частные производные; $C(t)$ – постоянная Лагранжа; здесь и далее $\Delta_1, \nabla_1, \text{div}_1$ – операторы Лапласа, градиент и дивергенции по переменным x, y ; угловые скобки обозначают скачок соответствующих функций на S , а именно $\langle \rho \Psi_t \rangle = \rho \Psi_{1r} - \Psi_{2r}$,

$$\langle \rho |\nabla \Psi|^2 \rangle = \rho (\Psi_{1z}^2 + \mu^2 |\nabla_1 \Psi_1|^2) - \Psi_{2z}^2 - \mu^2 |\nabla_1 \Psi_2|^2.$$

Безразмерные параметры выражаются:

$$\varepsilon = \frac{a}{R}, \quad \mu = \frac{R}{\lambda}, \quad \rho = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad r_1 = \frac{R_1}{R}, \quad r_2 = \frac{R_2}{R},$$

$$W = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0 U^2}{\rho_2 R}. \quad (7)$$

Здесь условие $\varepsilon \ll 1$ означает малость амплитуд отклонения свободной поверхности от равновесного состояния, а условие $\mu \ll 1$ выражает длинноволновость возмущений. Нелинейный анализ обычно проводится в условиях слабой нелинейности $\varepsilon \sim \mu^2$, когда при сохранении членов порядка $\varepsilon \sim \mu^2$ сохраняются квадратичные члены (слабая нелинейность).

ВЫВОД НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Решение разыскиваем в виде рядов по ε :

$$\Psi_i = \sum_{j=1}^{j=\infty} \varepsilon^j \Psi_{ij}, \quad \Phi = \sum_{j=0}^{j=\infty} \varepsilon^j \Phi_j \quad (i=1, 2), \quad (8)$$

где функции Ψ_{ij}, Φ_j зависят не только от времени и координат, но и от параметров ε, μ , обычно входящих множителями переменных t, x, y .

В нулевом приближении для Φ_0 имеем:

$$\Phi_0 = 1 - A \ln r, \quad A = 1 / \ln r_1. \quad (9)$$

Для первых двух приближений получаем следующие задачи первого ($j = 1$) и второго ($j = 2$) приближений:

$$(\Omega_i) : \hat{L} \Phi_j = \hat{L} \Psi_{ij} = 0; \quad (10)$$

$$r = r_1 : \psi_{1jr} = 0, \Phi_j = 0; \quad r = r_2 : \psi_{2jr} = 0; \quad (11)$$

$$r = 1 : \Phi_1 = Af, \quad 4, \quad (12)$$

$$\Psi_{11r} = \Psi_{21r},$$

$$\Psi_{12r} = \Psi_{22r} + (\Psi_{21rr} - \Psi_{11rr})f + \mu^2 \nabla_1 f \cdot \nabla_1 (\Psi_{11} - \Psi_{21}) \equiv H, \quad (13)$$

$$\Psi_{21} = \Psi, \quad \Psi_{22} = -\Psi_{1r} f. \quad (14)$$

Здесь (13) является условием непрерывности скорости на свободной поверхности в первом и втором приближениях соответственно; граничное условие $\Psi_{21} = \Psi$ в (14) вводит функцию $\Psi(t, r, x)$, подлежащую определению, $i = 1, 2$.

Решения для потенциалов электрического поля разыскиваем в виде преобразования Фурье:

$$\Phi_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_j^* G(k, r) e^{-ikx} dk \quad (j = 1, 2). \quad (15)$$

Функции, отмеченные звездочкой F_j^* , зависят только от времени и волнового числа. Подставляя (15) в уравнение (10) и используя граничные условия (12), (13) получаем:

$$G(k, r) = \frac{I_0(\mu kr) K_0(\mu kr_1) - I_0(\mu kr_1) K_0(\mu kr)}{I_0(\mu k) K_0(\mu kr_1) - I_0(\mu kr_1) K_0(\mu k)}, \quad (16)$$

$$F_1^* = Af^*, \quad F_2^* = -(\Phi_{0rr} f^2 / 2 + \Phi_{1r} f)^*.$$

Здесь $I_n(z)$, $K_n(z)$, ($n = 0, 1$) – модифицированные функции Бесселя n -го порядка [9]. Звездочка в верхнем индексе обозначает Фурье-преобразование соответствующих функций по переменной x .

Аналогичным образом находим выражения для потенциалов скоростей:

$$\psi_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H_{ij}^* G_i(k, r) e^{-ikx} dk \quad (i, j = 1, 2), \quad (17)$$

$$G_i(k, r) = \frac{I_0(\mu kr) K_1(\mu kr_1) + I_1(\mu kr_1) K_0(\mu kr)}{I_0(\mu k) K_1(\mu kr_1) + I_1(\mu kr_1) K_0(\mu k)} \quad (i = 1, 2), \quad (18)$$

$$H_{21}^* = \Psi^*, \quad H_{22}^* = -(\Psi_{21r} f)^*,$$

$$H_{11}^* = \Psi^* G_{2r} / G_{1r}, \quad H_{12}^* = H^* / G_{1r}.$$

Функции H_{ij}^* зависят только от времени и волнового числа в силу того, что функции ψ_{21r} и H в (13) берутся при $r = 1$.

Разлагая по степеням ε граничные условия (5), (6), с учетом (8) получаем систему двух интегродифференциальных уравнений относительно функций $f(t, x)$, $\Psi(t, x)$, которая с точностью $O(\varepsilon^2)$ имеет вид:

$$f_t = \mu^{-2} [\Psi_{21r} + \varepsilon (\Psi_{21rr} f + \Psi_{22r})] - \varepsilon \nabla_1 f \cdot \nabla_1 \Psi_{21}; \quad (19)$$

$$\langle \Psi \rangle_t + \frac{1}{2} \varepsilon \langle |\nabla f|^2 \rangle + \frac{1}{2} W E^2 + \mu^2 f_{xx} + f - \varepsilon f^2 = C_1; \quad (20)$$

$$\langle \Psi \rangle_t = \rho [\Psi_{11} + \varepsilon (\Psi_{11r} f + \Psi_{12})]_t - [\Psi_{21} + \varepsilon (\Psi_{21r} f + \Psi_{22})]_t, \quad (21)$$

$$\langle |\nabla f|^2 \rangle = \rho (\mu^{-2} \Psi_{11r}^2 + |\nabla_1 \Psi_{11}|^2) - \mu^{-2} \Psi_{21r}^2 - |\nabla_1 \Psi_{21}|^2, \quad (22)$$

$$E^2 = -2A(Af + \Phi_{1r}) + \varepsilon (3A^2 f^2 + \Phi_{1r}^2 + 2A(\Phi_{1r} f - \Phi_{1rr} f - \Phi_{2r})). \quad (23)$$

Уравнения (19)–(23) совместно с (15)–(18) представляют систему нелинейных интегродифференциальных уравнений относительно функций f , Ψ . В зависимости от значений параметров r_1 и μ эта система примечательна в нескольких отношениях. Укажем два предельных случая: при $r_1 \rightarrow \infty$, $\mu \ll 1$ получаем верхнюю жидкость в приближении «глубокой воды», а нижнюю – в приближении «мелкой воды». При этом уравнения (19), (20) становятся интегродифференциальными. Например, функция Φ_{1r} в том приближении записывается как:

$$\Phi_{1r} = -A \int_{-\infty}^{\infty} D(x-x') f(x') dx',$$

$$D(x-x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu k K_1(\mu k)}{K_0(\mu k)} e^{ik(x-x')} dk.$$

Отсюда видно, что ядро $D(x-x')$ интеграла имеет логарифмическую особенность в знаменателе, то есть (19), (20) будут системой нелинейных сингулярных интегродифференциальных уравнений.

При конечном r_1 и $\mu \ll 1$ получаем приближение «мелкой воды» для обоих слоев. Переход к приближению $\mu \ll 1$ – заключается в разложении функций в (15)–(18) по малому параметру μ и использовании формулы для произвольной непрерывно дифференцируемой функции $F = F(x)$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-D}^D k^n F^*(k) e^{-ikx} dk = (-i)^n \frac{\partial^n F}{\partial x^n}, \quad i = \sqrt{-1},$$

где n – целое число, а параметр D указывает пределы интегрирования.

Разлагая функции $G(k, r)$, $G_i(k, r)$ ($i = 1, 2$) в ряд по малому параметру μ вплоть до членов порядка μ^2 и μ^4 :

$$G(k, r) = -A \ln(r/r_1) - \mu^2 k^2 (A/4)$$

$$[F(r) + AF(1) \ln(r/r_1)] + O(\mu^4),$$

$$G_i(k, r) = 1 + \mu^2 k^2 A_{i1}(r) + \mu^4 k^4 A_{i2}(r) + O(\mu^6),$$

$$F(r) = r_1^2 - r^2 - (r_1^2 + r^2) \ln(r_1/r),$$

$$A_{i1}(r) = (r_i^2/2) (\ln(r_i/r - 1/2) + r^2/4),$$

$$A_{i2}(r) = (r_i^4/16)(\ln(r_i/r) - 5/4) + \\ + (r_i^2 r^2/8)(\ln(r_i/r) + 1/2) + r^4/64$$

и полагая $\varepsilon \sim \mu^2$, получаем следующую систему уравнений в длинноволновом приближении:

$$f_i + \varphi_1 \Psi_{xx} + \varepsilon(\varphi_2 f \Psi_{xx} + f_x \Psi_x) + \mu^2 \varphi_3 \Psi_{xxxx} = 0; \quad (24)$$

$$(1 + \rho \delta_0) \Psi_r + [W(1-A) - 1] f + \\ + \mu^2 [(W\beta_1 - 1) f_{xx} - \rho \delta_1 \Psi_{xx}] + \quad (25)$$

$$+ \varepsilon [0,5(1 - \rho \delta_0^2) \Psi_x^2 - \rho \Psi_{12r}] +$$

$$+ \varepsilon [1 - 1,5\beta_2 W] f^2 + C(t) = 0;$$

$$\varphi_1 = (1 - r_2^2)/2, \quad \varphi_2 = (1 + r_2^2)/2,$$

$$\varphi_3 = (1/4) [(1 - r_2^2)(1 - 3r_2^2)/4 - r_2^4 \ln r_2],$$

$$\delta_0 = \frac{1 - r_2^2}{r_1^2 - 1}, \quad \delta_1 = \frac{1}{r_1^2 - 1} [B(r_2) + \delta_0 B(r_1)],$$

$$W = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0 E_0^2 R}{\alpha}, \quad E_0 = \frac{U}{R \ln r_1},$$

$$\beta_1 = A(r_1^2 - 1) - 2(1 + \ln r_1),$$

$$\beta_2 = A^2 - (5/3)A + 1, \quad A = 1/\ln r_1,$$

$$B(r_i) = (1/4) [r_i^4 \ln r_i - 3r_i^4/4 + r_i^2 - 1/4] \quad (i = 1, 2),$$

где E_0 – напряженность электрического поля на свободной поверхности, а функция Ψ_{12} вычисляется при $r = 1$ и выражается как

$$\Psi_{12} = B_0 \int_{-\infty}^x f \Psi_x dx, \quad B_0 = \frac{2(r_1^2 - r_2^2)}{(r_1^2 - 1)^2}.$$

Можно убедиться, что при малых толщинах жидких слоев $R_1 - R \ll R$, $R - R_2 \ll R$ система уравнений (24), (25) переходит в нелинейные уравнения горизонтального жидкого слоя идеального проводника [1, 7, 8].

АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Анализ системы (24), (25) произведем в следующей последовательности. Вначале рассмотрим линеаризованную задачу, из которой получим условие стабилизации струи. Затем исследуем стационарные деформации струи в области устойчивости. Наконец, рассмотрим нелинейные волновые деформации.

1. Малые возмущения

Частоты малых колебаний в длинноволновом приближении определяются линеаризованными уравнениями (24), (25) и определяются линейным законом дисперсии (размерные переменные):

$$\omega = ck, \quad c = \eta \sqrt{\frac{\alpha}{\rho_2 R}}, \quad \eta = \sqrt{\frac{[W(1-A) - 1] \varphi_1}{1 + \rho \delta_0}}. \quad (26)$$

Из (26) видно, что при $r_1 < e$ будет $1 - A < 1$, то есть частота является мнимой, что означает

неустойчивость струи. Этот эффект обусловлен геометрией системы. Таким образом, в отсутствие электрического поля при отношении радиусов $R_1/R < e \cong 2,71$ поверхностное натяжение дестабилизирует поверхность. При $r_1 > e$ и $W > W_* = 1/(1 - A)$ электрическое поле стабилизирует осесимметричные длинноволновые возмущения [1].

2. Стационарные нелинейные формы поверхности

Полагая в (24), (25) $\Psi = 0$, получаем нелинейное уравнение, определяющее равновесные осесимметричные формы поверхности в длинноволновом приближении:

$$\partial^2 f / \partial x^2 = \alpha_1 f + \alpha_2 f^2 + C, \quad (27)$$

$$\alpha_1 = \frac{(1-A)(W - W_*)}{\mu^2 \beta_1 (W_1 - W)}, \quad \alpha_2 = \frac{\varepsilon}{\mu^2} \frac{3\beta_2 (W_2 - W)}{2\beta_1 (W_1 - W)},$$

$$W_* = \frac{1}{1-A}, \quad W_1 = \frac{1}{\beta_1}, \quad W_2 = \frac{2}{3\beta_2}.$$

В силу того, что коэффициенты α_1 , α_2 должны иметь порядок единицы, необходимо считать, что уравнение (27) следует рассматривать только в окрестности малой надкритичности $W - W_* \sim \varepsilon \sim \mu^2$.

При $C \neq 0$ уравнение (27) имеет нелинейные периодические решения [10], а при $C = 0$ – локализованные решения вида:

$$f = f_0 \text{ch}^{-2}(b\xi),$$

$$b = \frac{1}{2} \sqrt{\alpha_1}, \quad f_0 = -\frac{3}{2} \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = -\frac{(1-A)(W - W_*)}{\varepsilon \beta_2 (W_2 - W)}. \quad (28)$$

Параметр b определен только при $\alpha_1 > 0$. Из этого условия следуют новые эффекты, обусловленные кривизной поверхности. Так, если устойчивые решения по отношению к малым возмущениям существуют при $r_1 > e$ и $W > W_*$, то конечные по амплитуде возмущения имеются и при $r_1 < e$, но только в достаточно сильных полях $W > W_1$. При $r_1 > e$ в области устойчивости малых возмущений $W > W_*$ будет $\alpha_1 < 0$ (в силу $W_* > W_1$) (рис. 3), то есть уединенные локализованные деформации вида (28) не существуют. Однако при том же условии $r_1 > e$ в области $W_1 < W < W_*$ – существуют.

Из выражения для амплитуды f_0 в (28) следует, что в зависимости от значений r_1 и W амплитуда f_0 может изменять знак, то есть локализованные деформации могут иметь вид выпуклостей и утоньшений. Например, при $r_1 > e$ в области $W_2 < W < W_*$ амплитуда отрицательная (деформация в виде утоньшения), а при $W_1 < W < W_2$ – в виде утолщения. При $r_1 < e$

выпуклости могут образовываться в области $W < W_2$ и утоньшения в сильных полях $W > W_2$.

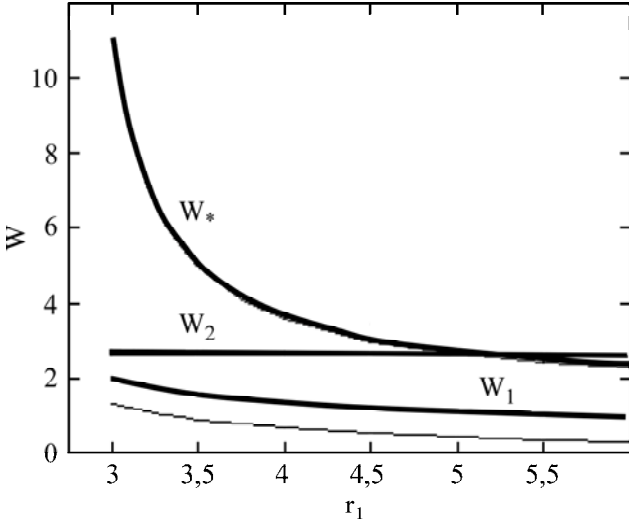


Рис. 3. Зависимость параметров W_* , W_1 , W_2 от r_1 .

Используя решение (28), получаем следующие выражения для размерной амплитуды a и характерного продольного размера λ деформации поверхности:

$$a = \left| \frac{(1-A)(W-W_*)}{\beta_2(W_2-W)} \right| R, \quad \lambda = \sqrt{\frac{\beta_1(W_1-W)}{(1-A)(W-W_*)}} R.$$

Из этих выражений видно, что условия $\varepsilon = a/R \ll 1$, $\mu = R/\lambda \ll 1$ выполняются при малой надкритичности $|(1-A)(W-W_*)| \ll 1$ и $W_1 \neq W$, $W_2 \neq W$.

3. Гидродинамические нелинейные волны на заряженной поверхности струи

Введем безразмерную скорость c_0 посредством

$$c_0^2 = \varphi_1 a_0^2, \quad a_0^2 = \zeta [W(1-A) - 1], \quad \zeta = 1/(1 + \rho\delta_0) \quad (29)$$

и будем считать $c \sim 1$. Тогда члены с малыми параметрами ε , μ^2 в (24), (25) обуславливают слабые нелинейные эффекты, приводящие к локализованным решениям солитонного типа, но практически не изменяющие скорость линейных волн. Такие решения описываются методикой исследования гидродинамических волн в длинноволновом приближении, поэтому будем их называть гидродинамическими нелинейными волнами на заряженной поверхности струи. Таким образом, система уравнений (24), (25) может быть преобразована по методике [10] в уравнение типа Картевега-де-Вриза (КдВ) следующим образом. Введем скорость течения на невозмущенной поверхности раздела $V = \Psi_x$. В данном случае с точностью до членов порядка ε имеем $\Psi_{12,xt} = -B_0(\varphi_1 V V_x + a_0^2 f f_x)$, $V_{xxt} = -a_0^2 f_{xxx}$, поэтому систему уравнений (24), (25) можно записать как

$$\bar{u}_t + A\bar{u}_x + \eta D\bar{u}_{xxx} = 0, \quad A = A_0 + \varepsilon A_1, \quad (30)$$

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} f \\ V \end{bmatrix}, \quad A_0 = \begin{bmatrix} 0 & \varphi_1 \\ a_0^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} V & \varphi_2 f \\ \eta_1 f & \eta_2 V \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & \varphi_3 \\ \eta_3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\eta_1 = \zeta(2 - 3\beta_2 W + \rho B_0 a_0^2),$$

$$\eta_2 = \zeta(1 - \rho\delta_0^2 - \rho B_0 \varphi_1), \quad \eta_3 = \zeta(\beta_1 W - 1 + \rho\delta_1 a_0^2).$$

Решение уравнения (30) будем искать в виде асимптотических рядов:

$$\bar{u} = \bar{u}_0 + \varepsilon \bar{u}_1 + \varepsilon^2 \bar{u}_2 + \dots + \eta \bar{w}_1 + \eta^2 \bar{w}_2 + \dots,$$

$$\eta = \mu^2. \quad (31)$$

Для нулевого приближения имеем $\bar{u}_{0t} + A_0 \bar{u}_{0x} = 0$.

Отсюда получаем $\bar{u}_0 = U(\xi) \bar{r}$,

где $U(\xi)$ – произвольная функция параметра $\xi = x - pt$; p – собственное число; \bar{r} – собственный вектор матрицы A_0 : $A_0 \bar{r} = \lambda \bar{r}$, причем $p = c_0$, а транспонированный вектор-строка выражается как $\bar{r}' = (1, c_0/\sqrt{\varphi_1})$. Отметим, что данный анализ справедлив при вещественном λ , то есть в области устойчивости малых возмущений, когда $r_1 > e$ и $W > W_*$.

Чтобы получить решение на промежутках времени $\varepsilon t \sim 1$, используем метод многих временных масштабов [9]. А именно, вводим медленные времена $\tau_1 = \varepsilon t$, $\tau_2 = \eta t$ и считаем, что $U = U(\xi, \tau_1, \tau_2)$. Тогда уравнение для $U(\xi, \tau_1, \tau_2)$ запишется в виде:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -c_0 \frac{\partial U}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial U}{\partial \tau_1} + \eta \frac{\partial U}{\partial \tau_2}. \quad (32)$$

Здесь учтено $U_\xi = U_x$. Таким образом, задача свелась к вычислению производных по τ_1 , τ_2 через производные по x . Для этого запишем уравнения для первого приближения:

$$(A_0 - \lambda I) \bar{u}_{1\xi} = -(\bar{u}_{0\tau_1} + A_1 \bar{u}_{0x}),$$

$$(A_0 - \lambda I) \bar{w}_{1\xi} = -(\bar{u}_{0\tau_2} + D \bar{u}_{0xxx}). \quad (33)$$

Чтобы исчезли секулярные члены в первом приближении, необходимо обратить в ноль правые части уравнений (33), то есть сделать их линейно зависимыми. Для этого достаточно умножить каждое уравнение в (33) скалярно на вектор-строку $\bar{r}' = (1, c_0)$ и приравнять правые части нулю, что с учетом $\bar{u}_0 = U \bar{r}$ дает:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau_1} = -U_x \frac{A_{10} \bar{r}' \cdot \bar{r}'}{\bar{r}' \cdot \bar{r}'}, \quad \frac{\partial U}{\partial \tau_2} = -U_{xxx} \frac{D \bar{r}' \cdot \bar{r}'}{\bar{r}' \cdot \bar{r}'},$$

$$A_{10} = \begin{bmatrix} c_0/\varphi_1 & \varphi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 c_0/\varphi_1 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Подставляя эти выражения в (32), получаем уравнение типа КдВ:

$$U_t + c_0 U_x + \varepsilon \xi_1 U U_x + \mu^2 \xi_2 U_{xxx} = 0, \quad (34)$$

$$\xi_1 = c(1 + \varphi_2 + \eta_1 + \eta_2 c^2) \zeta_1, \quad \xi_2 = c(\eta_3 + \varphi_3) \zeta_1,$$

$$\zeta_1 = 1/(1 + a_0^2/\varphi_1), \quad c = c_0/\varphi_1,$$

причем функции f , V выражаются как $f = U$, $V = cU$.

Рассмотрим решение в виде уединенной волны: $U = U_0 \operatorname{ch}^{-2} \xi$, $\xi = x - vt$. Подставляя это выражение в (34), получим:

$$U_0 = 12\mu^2 \xi_2 / (\varepsilon \xi_1), \quad v = c_0(1 + 4\mu^2 \xi_2). \quad (35)$$

Так как $v \sim c_0$, то с ростом поля скорость волны увеличивается, при этом амплитуда слабо зависит от поля. Таким образом, длинноволновые нелинейные гидродинамические волны на заряженной поверхности могут существовать при $r_1 > e$ и $W > W_*$, причем с ростом поля их скорость увеличивается при слабом изменении амплитуды.

4. Медленные нелинейные волны при малой надкритичности

Рассмотрим медленные движения локализованных деформаций при малой надкритичности, когда $W - W_* \sim \varepsilon \sim \mu^2$. После замены переменных $f = F(\tau, x)$, $\Psi = \eta H(\tau, x)/\varphi_1$, $\eta = \sqrt{\varepsilon}$, $\tau = \eta t$ для функции $F(\tau, x)$ с точностью до $O(\eta)$ получим следующее уравнение:

$$\alpha_0 \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \alpha_1 F - \alpha_2 F^2 \right),$$

$$\alpha_0 = \frac{\varepsilon}{\mu^2} \frac{1 + \rho \delta_0}{\varphi_1 \beta_1 (W - W_1)}, \quad (36)$$

где α_1, α_2 определены в (27).

Уравнение (36) по виду совпадает с уравнением колебаний нелинейной струны, общее решение которого можно выписать в виде комбинаций функций, описывающих уединенные волны [11]. Основные свойства нелинейной динамики можно уяснить на примере уединенного локализованного решения вида $F = A \operatorname{ch}^{-2}(b\xi)$, $\xi = x - V\tau$. В этом случае:

$$b = \frac{1}{2} \sqrt{\alpha_1 + \alpha_0 V^2}, \quad F_0 = -\frac{3}{2} \frac{\alpha_1 + \alpha_0 V^2}{\alpha_2}. \quad (37)$$

Отсюда видно, что при $W > W_1$, когда $\alpha_0 > 0$, движение локализованной деформации уменьшает ее продольный размер. При этом в зависимости от знаков параметров α_1, α_2 амплитуда деформации может как увеличиваться, так и уменьшаться. При обращении скорости в ноль $V = 0$ решение (37), как и следовало ожидать, переходит в стационарные деформации (28). Таким образом, локализованные деформации

заряженной цилиндрической струи ведут себя подобно локализованным возбуждениям, которые могут покоиться и двигаться как частицы.

ВЫВОДЫ

1. Наличие кривизны поверхности в отличие от плоской поверхности [1, 7, 8] порождает ряд новых нелинейных эффектов. В частности, в зависимости от отношения радиусов $r_1 = R_1/R$ на поверхности могут образовываться как локальные выпуклости, так и утоньшения, которые покоятся или движутся подобно частицам.

2. Выбором напряженности электрического поля и геометрии электродов можно как подавлять развитие нелинейных деформаций, так и, наоборот, возбуждать их.

3. С прикладной точки зрения результаты исследований можно использовать, например, при производстве многослойных нитей или микротрубочек, так как выбор геометрии системы и значений электрических параметров играет определяющую роль для стабилизации поверхности. При этом важно избегать внешних возмущений, которые приводят к движению деформаций, а тем самым к увеличению их амплитуд, то есть нарушению качества изделий.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жакин А.И. Успехи физических наук. 2013, **183**(2), 153–177.
2. Жакин А.И., Белов П.А. ЭОМ. 2013, **49**(4), 24–29.
3. Reneker D.H., Yarin A.L., E. Zussman E. and Xu H. *Adv Appl Mech.* 2007, **41**, 43–197.
4. Barrero F., Loscertales I.G. *Annu Rev Fluid Mech.* 2007, **39**, 89–106.
5. Fang Li, Xie-Yuan Yin and Xie-Zhen Yin J. *J Fluid Mech.* 2009, **632**, 199–225.
6. Matthew P. Juniper. *J Fluid Mech.* 2008, **605**, 227–252.
7. Жакин А.И. *Известия АН СССР. Механика жидкости и газа.* 1984, (3), 94–102.
8. Жакин А.И. ЭОМ. 2017, **53**(2), 21–37.
9. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. *Специальные функции.* М.: Наука, 1984.
10. Лейбович С., Сидней А.Р. *Нелинейные волны.* М.: Мир, 1977. С. 113–150.
11. Кунин И.А. *Теория упругих сред с микроструктурой. Нелокальная теория упругости.* М.: Наука, 1975. 415 с.

Summary

The theoretical results of investigations of the electric field influence on cylindrical jets of a liquid dielectric with a fast charges relaxation in a weak non-linear approximation are presented. It is shown that on the interfaces the local and the periodical deformations and non-linear waves are formed. A behavior of the free surfaces of jets under the changing electric field intensity is investigated.

Keywords: liquid dielectric, polarization, conductivity, nonlinear waves, soliton.