

Временная эволюция амплитуд капиллярных волн на поверхности заряженной струи, движущейся относительно материальной диэлектрической среды

*С. О. Ширяева, А. И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
г. Ярославль, 150000, Россия, *e-mail: shir@uniyar.ac.ru

Рассчитана временная эволюция амплитуд капиллярных волн произвольной симметрии на поверхности заряженной цилиндрической струи идеальной несжимаемой электропроводной жидкости, движущейся относительно идеальной несжимаемой диэлектрической среды, с учетом многомодовых начальных условий. Найдены аналитические выражения для временной эволюции амплитуд волн на струе, амплитудных значений гидродинамических потенциалов полей скоростей в струе и среде, а также электрического потенциала поля в окрестности струи. Проведена оценка характерного времени отрыва капли от струи. Исследована очередность возбуждения различных азимутальных мод.

Ключевые слова: заряженная струя, внешняя среда, начальные условия, азимутальная симметрия, неустойчивость, капля.

УДК 77.051.15: 621.384.8

DOI: 10.5281/zenodo.1297939

ВВЕДЕНИЕ

Проблему изучения закономерностей разбегания струй на отдельные капли исследователи не обходили вниманием (см., например, [1–7]) полтора столетия. За это время обнаружено так много режимов распада струй, что стала актуальной проблема их классификации с обозначением физических причин распада [8–11]. В частности, оказалось, что режим распада зависит от симметрии волн на поверхности струи. Общие закономерности возбуждения первых двух осесимметричных мод капиллярных волн на струе можно найти в [12–13], а фотографии таких мод в [14]. В итоге появилась проблема исследования устойчивости волн с произвольной симметрией на поверхности цилиндрической струи, описываемых функциями более общего вида по сравнению с осесимметричными, а именно $\sim \exp(im\varphi) \cdot \exp(ikz) \cdot \exp(st)$, где s – частота волн; t – время; φ – азимутальный угол; k – волновое число; m – азимутальное число. Осесимметричная волна отвечает случаю $m = 0$, а $m = 1$ и $m = 2$ – изгибной и деформационной волнам соответственно.

ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Пусть струя радиуса R идеальной несжимаемой жидкости плотностью ρ_m движется с постоянной скоростью $\vec{U} = U \cdot \vec{e}_z$ (\vec{e}_z – орт координаты z) относительно идеальной несжимаемой диэлектрической среды плотностью ρ_{ex} , диэлектрической проницаемости ϵ_d . На поверхности струи

распределен заряд с поверхностной плотностью χ . Коэффициент поверхностного натяжения границы раздела сред σ . Задачу будем решать в цилиндрической системе координат, ось OZ совпадает с осью симметрии невозмущенной струи, а начало координат движется со скоростью струи.

Форму свободной поверхности струи (границы раздела сред) опишем уравнением:

$$r = R + \xi(\varphi, z, t); F(r, \varphi, z, t) \equiv \\ \equiv r - (R + \xi(\varphi, z, t)) = 0;$$

где $\xi(\varphi, z, t)$ – возмущение равновесной цилиндрической поверхности струи, происходящее из-за капиллярного волнового движения, генерируемого уже тепловым движением молекул жидкости [15]. Амплитуда таких волн весьма мала и по порядку величины определяется выражением $\sim \sqrt{\kappa T / \sigma}$, где κ – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура [15].

Безразмерная амплитуда возмущения принимается в качестве малого параметра задачи: $\epsilon \equiv \max |\xi(\varphi, z, t)| / R$.

Математическая формулировка задачи имеет вид по аналогии с [16]:

$$\operatorname{div} \vec{u}_j = 0; \frac{\partial \vec{u}_j}{\partial t} + (\vec{u}_j \cdot \nabla) \vec{u}_j = -\frac{1}{\rho_j} \nabla P_j;$$

$$(j = in, ex);$$

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}, t) = 0;$$

граничные условия:

$$\begin{aligned}
r \rightarrow \infty: \quad & \vec{u}_{ex} \rightarrow -\vec{U}; \quad r \rightarrow 0: u_{in} \rightarrow 0 \\
F(\vec{r}, t) = 0; \quad & \frac{dF(\vec{r}, t)}{dt} = \frac{\partial F(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{u}_j \cdot \nabla F(\vec{r}, t) = 0; \\
p_{in}(\vec{r}, t) - p_{ex}(\vec{r}, t) + p_E(\vec{r}, t) - p_\sigma(\vec{r}, t) = 0; \\
p_E(\vec{r}, t) = \frac{\varepsilon_d}{8\pi} & \left(\vec{E}(\vec{r}, t) \right)^2; \quad p_\sigma(\vec{r}, t) = \sigma \operatorname{div} \vec{n}(\vec{r}, t); \\
\vec{n}(\vec{r}, t) = \left(\frac{\nabla F(\vec{r}, t)}{|\nabla F(\vec{r}, t)|} \right); \quad & \vec{\tau}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 0;
\end{aligned}$$

$\vec{\tau}(\vec{r}, t)$ и $\vec{n}(\vec{r}, t)$ – орты касательной и нормали к возмущенной поверхности струи; $u_j \equiv u_j(\vec{r}, t)$ и $P_j = P_j(\vec{r}, t)$ – поля скоростей течения жидкости и гидродинамических давлений в струе ($j = in$) и во внешней среде ($j = ex$).

Для участка струи длиной, равной длине волны λ :

$$\begin{aligned}
& \int_a^{a+\lambda} \int_0^{2\pi} \int_0^{R+\xi} r dr d\varphi dz = \pi\lambda; \\
& \frac{1}{4\pi} \int_a^{a+\lambda} \int_0^{2\pi} \frac{\vec{n}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)}{\vec{n}(\vec{r}, t) \cdot \vec{e}_r} r d\varphi dz = 2\pi\lambda; \quad (1)
\end{aligned}$$

где \vec{e}_r – орт радиальной координаты.

Примем, что в начальный момент времени возмущение цилиндрической поверхности струи представлено в виде суперпозиции конечного спектра волн с разными волновыми k_l и азимутальными числами $m_{l,j}$:

$$\begin{aligned}
t = 0: \quad & \xi(\varphi, z, 0) = \\
= \varepsilon \sum_{l \in \Omega} \sum_{j \in \Xi} & (\zeta_{l,j} \cdot \exp(im_{l,j}\varphi) + \bar{\zeta}_{l,j} \cdot \exp(-im_{l,j}\varphi)) \cdot \exp(ik_l z); \\
& \frac{\partial}{\partial t} \xi(\varphi, z, 0) = 0; \quad (2)
\end{aligned}$$

где Ω – спектр волновых чисел и изначально возбужденных волн; Ξ – спектр азимутальных чисел для каждого фиксированного волнового числа k_l ; $\zeta_{l,j}$ – амплитуды изначально возбужденных мод.

Все нижеследующие расчеты будем проводить в безразмерных переменных, где $R = \rho_{in} = \sigma = 1$.

СКАЛЯРИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ

В рамках модели потенциального течения жидкости в квазиэлектростатическом приближении представим поле скоростей и вектор напряженности в виде градиентов гидродинамического [17] и электрического [18] потенциалов соответственно:

$$\vec{u}_j(\vec{r}, t) = \nabla \psi_j(\vec{r}, t); (j = in, ex); \quad \vec{E}(\vec{r}, t) = -\nabla \Phi(\vec{r}, t).$$

С учетом этих формул уравнения непрерывности скорости и электрического поля переходят в уравнения Лапласа:

$$\Delta \psi_j(\vec{r}, t) = 0; \quad \Delta \Phi(\vec{r}, t) = 0.$$

Уравнения Эйлера легко интегрируются, и в результате получаются выражения для гидродинамических давлений внутри струи и во внешней среде:

$$P_j(\vec{r}, t) = p_{0,j} - \rho_j \left(\frac{\partial \psi_j(\vec{r}, t)}{\partial t} + \frac{(\nabla \psi_j(\vec{r}, t))^2}{2} \right).$$

Естественные условия для потенциалов на оси и на бесконечности преобразуются к виду:

$$r \rightarrow \infty: \quad \psi_{ex} \rightarrow -Uz; \quad \nabla \Phi \rightarrow 0; \quad r \rightarrow 0: \psi_{in} \rightarrow 0.$$

Граничные условия на поверхности струи также переформулируются в условия на потенциалы ψ_{in} , ψ_{ex} , Φ .

Кинематические условия на поверхности струи примут вид:

$$\frac{\partial F(\vec{r}, t)}{\partial t} + \nabla \psi_j(\vec{r}, t) \cdot \nabla F(\vec{r}, t) = 0.$$

Отсутствие тангенциальной компоненты вектора напряженности электрического поля на поверхности струи преобразуется в условие ее эквипотенциальности:

$$\Phi = \text{const}.$$

Динамическое граничное условие задачи (1) не меняет своего вида, только давление электрических сил записывается через электрический потенциал:

$$P_E(\vec{r}, t) = \frac{\varepsilon_d}{8\pi} (\nabla \Phi(\vec{r}, t))^2.$$

Задача решается асимптотическим методом многих временных масштабов в линейном приближении по малому параметру ε [19]. Все искомые функции будут зависеть от разных временных масштабов, определяемых через малый параметр ε : $T_p = \varepsilon^p t$; ($p = 0, 1, 2, \dots$). Производная по времени вычисляется по правилу [19–20]:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \varepsilon^0 \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon^1 \frac{\partial}{\partial T_1} + O(\varepsilon^2) \dots \quad (3)$$

Представим искомые функции в виде разложений по малому параметру задачи [20]:

$$\begin{aligned}
& \psi_{in}(r, \varphi, z, T_0, T_1) = \\
& = \varepsilon \psi_{in}^{(1)}(r, \varphi, z, T_0, T_1) + O(\varepsilon^2); \quad (4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{ex}(r, \varphi, z, T_0, T_1) &= \\
= \Psi_{ex}^{(0)}(z) + \varepsilon \Psi_{ex}^{(1)}(r, \varphi, z, T_0, T_1) + O(\varepsilon^2); \\
\Phi(r, \varphi, z, T_0, T_1) &= \\
= \Phi^{(0)}(r) + \varepsilon \Phi^{(1)}(r, \varphi, z, T_0, T_1) + O(\varepsilon^2); \\
\xi(\varphi, z, T_0, T_1) &= \varepsilon \cdot \xi^{(1)}(\varphi, z, T_0, T_1) + O(\varepsilon^2).
\end{aligned}$$

Верхний индекс в скобках указывает на порядок малости соответствующей компоненты.

В виде аналогичных разложений представим входящие в динамическое граничное условие давления на поверхности струи:

$$\begin{aligned}
p_{in} &= p_{in}^{(0)} + \varepsilon p_{in}^{(1)} + O(\varepsilon^2); \\
p_{ex} &= p_{ex}^{(0)} + \varepsilon p_{ex}^{(1)} + O(\varepsilon^2); \\
p_E &= p_E^{(0)} + \varepsilon p_E^{(1)} + O(\varepsilon^2); \\
p_\sigma &= p_\sigma^{(0)} + \varepsilon p_\sigma^{(1)} + O(\varepsilon^2). \quad (5)
\end{aligned}$$

Подставив разложения (3)–(5) в систему уравнений граничных и начальных условий скаляризованной задачи и группируя слагаемые при соответствующих степенях малого параметра ε , разобьем исходную задачу на краевые задачи нулевого и первого порядков малости.

ЗАДАЧА НУЛЕВОГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ

Эта задача описывает невозмущенное равновесное состояние системы: цилиндрическую струю, движущуюся относительно среды с постоянной скоростью:

$$\vec{U} = U \vec{e}_z.$$

Во введенной системе координат, движущейся вместе со струей, сама струя остается неподвижной, а внешняя среда движется со скоростью \vec{U} . Очевидно, что потенциал скорости внешней среды в равновесном состоянии будет иметь вид:

$$\Psi_{ex}^{(0)} = -Uz.$$

Распределение электрического потенциала в окрестности цилиндрической струи определяется следующей краевой задачей нулевого порядка малости:

$$\Delta \Phi^{(0)} = 0$$

$$r \rightarrow \infty: \nabla \Phi^{(0)\text{TM}} = 0;$$

что означает стремление к нулю напряженности поля цилиндрической струи на бесконечном удалении от нее:

$$r = 1: \Phi^{(0)} = \text{const};$$

$$-\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_a^{\lambda} \partial_r \Phi^{(0)} d\varphi dz = 2\pi\lambda\chi_0.$$

Интегральное условие означает сохранность заряда на длине капиллярной волны струи. Здесь и в дальнейшем для упрощения записи будем использовать для обозначения знака частной производной по некоей координате x не $\frac{\partial}{\partial x}$, а

символ ∂_x .

Решение выписанной задачи с учетом осевой симметрии равновесного состояния легко находится:

$$\Phi^{(0)}(r) = -4\pi\chi_0 \log(r).$$

Динамическое граничное условие на равновесной поверхности струи:

$$r = 1: p_{in}^{(0)} - \left(-\frac{1}{2}U^2 p_2 + p_{ex}^{(0)}\right) + \frac{\varepsilon_d}{8\pi} \left(\frac{\partial \Phi^{(0)}(r)}{\partial r}\right)^2 = 1$$

определяет разность давлений в среде и струе в равновесном состоянии:

$$p_{in}^{(0)} - p_{ex}^{(0)} = 1 - \frac{\rho_{ex} U^2}{2} - 2\pi\varepsilon_d \chi^2.$$

ЗАДАЧА ПЕРВОГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ

Математическая формулировка задачи первого порядка малости имеет вид:

$$\Delta \Psi_{ex}^{(1)} = 0; \Delta \Psi_{in}^{(1)} = 0; \Delta \Phi^{(1)} = 0;$$

$$r \rightarrow 0: \nabla \Psi_{in}^{(1)} \rightarrow 0; r \rightarrow \infty: \nabla \Psi_{ex}^{(1)} \rightarrow 0;$$

$$r \rightarrow \infty: \nabla \Phi^{(1)} \rightarrow 0;$$

$$\partial_r \Psi_{in}^{(1)} \Big|_{r=1} - \partial_{T_0} \xi^{(1)} = 0;$$

$$\partial_r \Psi_{ex}^{(1)} \Big|_{r=1} - \partial_{T_0} \xi^{(1)} - (\partial_z \Psi_{ex}^{(0)}) (\partial_z \xi^{(1)}) = 0;$$

$$\begin{aligned}
&\left(-\partial_{T_0} \Psi_{in}^{(1)} + \rho_{ex} \left(\partial_{T_0} \Psi_{ex}^{(1)} + (\partial_z \Psi_{ex}^{(0)}) (\partial_z \Psi_{in}^{(1)}) \right) + \right. \\
&\left. + \frac{\varepsilon_d}{4\pi} (\partial_r \Phi^{(0)}) \left(\partial_r \Phi^{(1)} + (\partial_{r,r} \Phi^{(0)}) \xi^{(1)} \right) + \xi^{(1)} + \partial_{z,z} \xi^{(1)} + \partial_{\varphi,\varphi} \xi^{(1)} \right) \Big|_{r=1} = 0;
\end{aligned}$$

$$\Phi^{(1)} \Big|_{r=1} + \xi^{(1)} \partial_r \Phi^{(0)} = 0;$$

условие неизменности заряда на длине капиллярной волны:

$$-\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_a^{\lambda} \left(\xi^{(1)} \left(\partial_r \Phi^{(0)} + \partial_{r,r} \Phi^{(0)} \right) + \Phi^{(1)} \right) \Big|_{r=1} d\varphi dz = 0;$$

условие неизменности объема струи на длине капиллярной волны:

$$\int_0^{2\pi a + \lambda} \int_a \xi^{(1)} d\varphi dz = 0;$$

начальные условия:

$$\xi^{(1)} \Big|_{t=0} = \sum_{l \in \Xi_l} \sum_{m \in \Omega_{l,m}} \exp(ikz) (\zeta_{l,m} \exp(im\varphi) + \zeta_{l,m} \exp(-im\varphi));$$

$$\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0.$$

Запишем решения уравнений Лапласа для гидродинамических и электрического потенциалов, гармонических по координатам (φ, z) и удовлетворяющих естественным граничным условиям [21] в виде:

$$\psi_{in}^{(1)} = (B_1(T_0, T_1) \cdot \exp(im\varphi) + B_2(T_0, T_1) \cdot \exp(-im\varphi)) \frac{I_m(kr)}{I_m(k)} \cdot \exp(ikz);$$

$$\psi_{ex}^{(1)} = (A_1(T_0, T_1) \cdot \exp(im\varphi) + A_2(T_0, T_1) \cdot \exp(-im\varphi)) \frac{K_m(kr)}{K_m(k)} \cdot \exp(ikz);$$

$$\Phi^{(1)} = (F_1(T_0, T_1) \cdot \exp(im\varphi) + F_2(T_0, T_1) \cdot \exp(-im\varphi)) \quad (6)$$

$$\frac{K_m(kr)}{K_m(k)} \cdot \exp(ikz),$$

где $I_m(x)$ и $K_m(x)$ – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода [21].

Волновое возмущение равновесной поверхности струи запишется аналогично:

$$\xi^{(1)} = [\alpha_1(T_0, T_1) \cdot \exp(im\varphi) + \alpha_2(T_0, T_1) \cdot \exp(-im\varphi)] \exp(ikz).$$

Подставляя это выражение и выражение для $\psi_{in}^{(1)}$ в кинематическое граничное условие скаляризованной задачи и приравнивая коэффициенты при одинаковых экспонентах, найдем связь коэффициентов B_1, B_2 с амплитудами α_1 и α_2 :

$$B_q(T_0, T_1) \cdot g_m(k) - \partial_{T_0} \alpha_q(T_0, T_1) = 0; \quad (q = 1, 2);$$

$$g_m(k) = \frac{k \cdot I'_m(k)}{I_m(k)}. \quad (7)$$

$I'_m(k)$ – производная функции Бесселя по аргументу.

Из второго кинематического условия, используя выражение для возмущения поверхности струи и выражение для $\psi_{ex}^{(1)}$, аналогично находим связь коэффициентов A_1, A_2 с амплитудами α_1 и α_2 :

$$A_q(T_0, T_1) \cdot h_m(k) + i \cdot k \cdot U \cdot \alpha_q(T_0, T_1) - \partial_{T_0} \alpha_q(T_0, T_1) = 0; \quad (q = 1, 2);$$

где использовано обозначение: $h_m(k) = \frac{k \cdot K'_m(k)}{K_m(k)}$.

Связь коэффициентов F_1 и F_2 с амплитудами α_1 и α_2 получается после преобразования усло-

вия эквипотенциальности с учетом явного вида выражений для возмущения поверхности и электрического потенциала $\Phi^{(1)}$:

$$F_q(T_0, T_1) + \alpha_q(T_0, T_1) \cdot \partial_r \Phi^{(1)} \Big|_{r=1} = 0; \quad (q = 1, 2). \quad (9)$$

При подстановке на возмущенной поверхности выражений для гидродинамических потенциалов $\psi_{in}^{(1)}$ и $\psi_{ex}^{(1)}$ и электрического потенциала в динамическое граничное условие получим соотношение:

$$-i \cdot k \cdot U \cdot A_q(T_0, T_1) \rho_{ex} - \varepsilon_d \cdot F_q(T_0, T_1) \cdot h_m(k) \cdot \chi_0 + \alpha_q(T_0, T_1) - k^2 \alpha_q(T_0, T_1) - m^2 \alpha_q(T_0, T_1) - 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_d \cdot \chi_0^2 \cdot \alpha_q(T_0, T_1) + \rho_{ex} \cdot \partial_{T_0} A_q(T_0, T_1) - \partial_{T_0} B_q(T_0, T_1) = 0; \quad (q = 1, 2). \quad (10)$$

Уравнения (7)–(9) образуют линейную алгебраическую систему для коэффициентов A_q, B_q, F_q , решая которую получим их выражения через α_j :

$$A_q(T_0, T_1) = \frac{1}{h_m(k)} (\partial_{T_0} \alpha_q(T_0, T_1) - i \cdot k \cdot U \cdot \alpha_q(T_0, T_1)),$$

$$B_q(T_0, T_1) = \frac{1}{g_m(k)} \partial_{T_0} \alpha_q(T_0, T_1), \quad (11)$$

$$F_q(T_0, T_1) = 4 \cdot \pi \cdot \chi_0 \cdot \alpha_q(T_0, T_1).$$

Подставляя коэффициенты (11) в соотношения (10), получаем дифференциальное уравнение второго порядка для амплитуд $\alpha_q(T_0, T_1)$:

$$\partial_{T_0, T_0} \alpha_q(T_0, T_1) + i \cdot k \cdot U \cdot \partial_{T_0} \alpha_q(T_0, T_1) \gamma_m(k) + \omega_0^2 \alpha_q(T_0, T_1) = 0; \quad (12)$$

$$\omega_0^2 = \frac{g_m(k)}{1 - \rho_{ex} \frac{g_m(k)}{h_m(k)}} \left(k^2 + m^2 - 1 + \frac{k^2 \cdot We}{h_m(k)} + w(1 + h_m(k)) \right);$$

$$w \equiv 4\pi \varepsilon_d \cdot \chi_0^2; \quad We \equiv \rho_{ex} U^2;$$

$$\gamma_m(k) = \frac{2\rho_{ex} g_m(k)}{h_m(k) - \rho_{ex} g_m(k)}.$$

Уравнение (12) является эволюционным, определяющим зависимость $\alpha_q(T_0, T_1)$ от временного масштаба T_0 . Путем подстановки в него проекта решений в виде гармонической функции $\alpha_q \sim \exp(i\omega T_0)$ получим дисперсионное уравнение:

$$\omega^2 + kU\gamma_m(k)\omega - \omega_0^2 = 0. \quad (13)$$

Решениями дисперсионного уравнения (13) будут корни ω_1 и $-\omega_2$:

$$\omega_1(k, m) = \frac{1}{2}kU\gamma_m(k) + \sqrt{\omega_0^2 + 0,25(kU\gamma_m(k))^2}; \quad (14)$$

$$\omega_2(k, m) = -\frac{1}{2}kU\gamma_m(k) + \sqrt{\omega_0^2 + 0,25(kU\gamma_m(k))^2}.$$

Частоты (14) могут быть как вещественными, так и комплексными в зависимости от знака подкоренного выражения. Если оно становится отрицательным, то у частот появляются мнимые части, а соответствующие им волны теряют устойчивость. Мнимая часть комплексной частоты определяет инкремент экспоненциального нарастания амплитуды волны. Так как подкоренные выражения у обоих решений дисперсионного уравнения одинаковы, то и условия проявления неустойчивости для обеих волн будут одинаковыми.

Запишем общее решение уравнения (12) в виде:

$$\alpha_q(T_0, T_1) = A \cdot \exp(iT_0 \omega_1) \cdot \alpha_q(T_1) + B \cdot \exp(iT_0 \omega_2) \cdot \alpha_q(T_1);$$

где $A \cdot \alpha_q(T_1)$ и $B \cdot \alpha_q(T_1)$ – функции, описывающие зависимости амплитуд от масштаба времени T_1 , определяются в задаче следующего порядка малости.

Используя решения (6) и соотношения между коэффициентами (11) после некоторых преобразований и переобозначений функций, определяющих зависимость решений от временного масштаба T_1 , приведем выражения для потенциалов и возмущения поверхности к следующему виду:

$$\begin{aligned} \xi^{(1)} &= \left(A(T_1) \exp(im\varphi) + \bar{A}(T_1) \exp(-im\varphi) \right) \exp[i(kz - T_0\omega_1)] + \\ &+ \left(B(T_1) \cdot \exp(im\varphi) + \bar{B}(T_1) \cdot \exp(-im\varphi) \right) \exp[i(kz + T_0\omega_2)]; \\ \psi_{in}^{(1)} &= -\frac{i}{g_m(k)} \left(\alpha_1 \left(A(T_1) \cdot \exp(im\varphi) + \bar{A}(T_1) \cdot \exp(-im\varphi) \right) \exp[i(kz - T_0\omega_1)] - \right. \\ &\left. - \omega_2 \left(B(T_1) \cdot \exp(im\varphi) + \bar{B}(T_1) \cdot \exp(-im\varphi) \right) \exp[i(kz + T_0\omega_2)] \right) \frac{I_m(kr)}{I_m(k)}; \\ \psi_{ex}^{(1)} &= -\frac{i}{h_m(k)} \left((\omega_1 + kU) \left(A(T_1) \cdot \exp(im\varphi) + \bar{A}(T_1) \cdot \exp(-im\varphi) \right) \exp[i(kz - T_0\omega_1)] - \right. \\ &\left. - (\omega_2 - kU) \left(B(T_1) \cdot \exp(im\varphi) + \bar{B}(T_1) \cdot \exp(-im\varphi) \right) \exp[i(kz + T_0\omega_2)] \right) \frac{K_m(kr)}{K_m(k)}; \\ \Phi^{(1)} &= 4\pi\chi \left(\left(A(T_1) \cdot \exp(im\varphi) + \bar{A}(T_1) \cdot \exp(-im\varphi) \right) \exp[i(kz - T_0\omega_1)] + \right. \\ &\left. + \left(B(T_1) \cdot \exp(im\varphi) + \bar{B}(T_1) \cdot \exp(-im\varphi) \right) \exp[i(kz + T_0\omega_2)] \right) \frac{K_m(kr)}{K_m(k)}, \quad (15) \end{aligned}$$

где ω_1 и $-\omega_2$ определяются выражениями (14), вид функций $A(T_1)$, $B(T_1)$ и комплексно сопряженных к ним функций $\bar{A}(T_1)$, $\bar{B}(T_1)$ определяется в задаче следующего порядка малости.

Заметим, что общие решения для потенциалов и возмущения поверхности следует писать в виде

суперпозиции частных решений (15) для всех возможных значений волнового числа k и азимутального числа m , то есть в виде интеграла по k и суммы по m .

АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ

Анализ решений дисперсионного уравнения проведем численно.

На рис. 1 приведены зависимости от волнового числа k вещественных и мнимых частей обеих частот ω_1 и ω_2 , определяемых (14), для основной осесимметричной моды ($m = 0$) капиллярных волн поверхности струи (на границе раздела сред) при различных значениях скорости движения струи U . Цифрами 1–3 обозначены частоты капиллярных волн, а цифрами 4–6 – инкременты в тех областях значений физических параметров, в которых капиллярные волны теряют устойчивость. Согласно (14), аналитические выражения частот ω_1 и ω_2 состоят из двух слагаемых: всегда вещественного (при любых значениях входящих величин) первого слагаемого $\sim kU\gamma_m(k)$ и второго слагаемого, радикала, который в зависимости от значений физических параметров может быть как вещественным, так и мнимым. Условием появления мнимой компоненты частоты (инкремента) или реализации неустойчивости волны является переход через ноль выражения, стоящего под радикалом. На рис. 1 первые компоненты частоты изображены почти прямыми линиями в малой (сомножитель $\gamma_m(k)$ порядка тысячной доли единицы) окрестности оси абсцисс: на рис. 1а эти линии лежат в области отрицательных значений $\text{Re}\omega$, а на рис. 1б – в области положительных $\text{Re}\omega$. Своим происхождением эти ветви частот обязаны наличию движения струи относительно материальной среды и при равной нулю скорости обращаются в ноль. При разных по величине скоростях струи (см. рис. 1) соответствующие линии различаются на толщину линии. Эти ветви кончаются быстрым ростом частоты, когда подрадикальное выражение становится положительным.

Рис. 1а и 1б в остальном одинаковы (см. (14)), а на рис. 2 и 3 ограничимся изображением только ω_1 .

Из рис. 1 следует, что при $\varepsilon_{ex} = 1$, $\chi_0 = 0$, $\rho_{ex} = 0,001$ и различных скоростях неустойчивы длинные капиллярные волны и с увеличением скорости струи расширяется зона неустойчивости за счет смещения правой границы. При этом также увеличиваются инкременты, то есть с увеличением скорости движения струи неустойчивость развивается быстрее. Неустойчивость

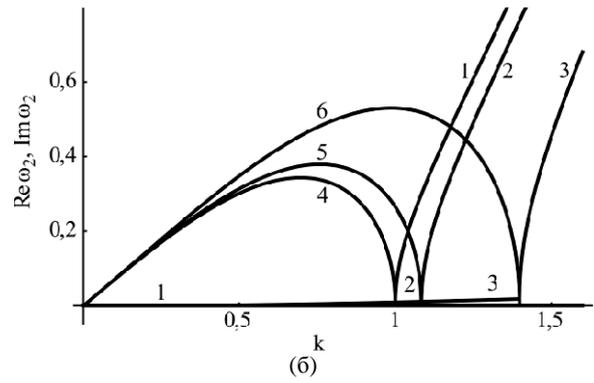
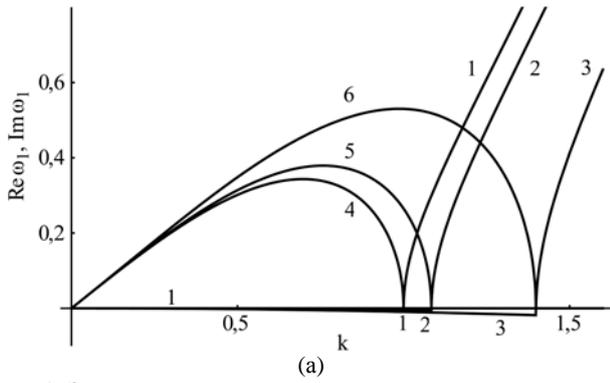


Рис. 1. Зависимость от волнового числа вещественных и мнимых частей частот волн для осесимметричной моды ($m = 0$). Линии: 1 и 4 – $U = 0$; 2 и 5 – $U = 15$; 3 и 6 – $U = 30$. Линии 1–3 – это $\text{Re } \omega$, линии 4–6 – это $\text{Im } \omega$. Рассчитано при $m = 0$, $\varepsilon_{ex} = 1$, $\chi_0 = 0$, $\rho_{ex} = 0,001$. Для ω_1 (а); для ω_2 (б).

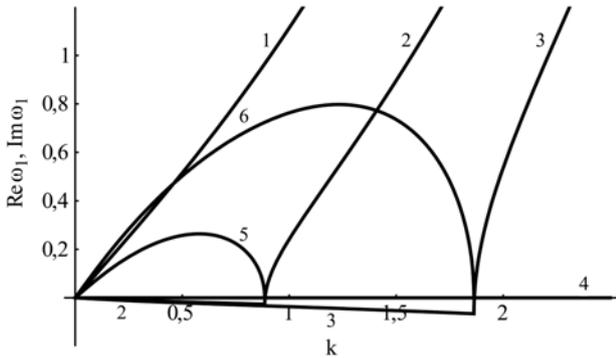


Рис. 2. Зависимость от волнового числа вещественных и мнимых частей частоты волны ω_1 для изгибающей моды ($m = 1$). Линии: 1 и 4 – $U = 0$; 2 и 5 – $U = 40$; 3 и 6 – $U = 50$. Линии 1–3 – это $\text{Re } \omega_1$; линии 4–6 – это $\text{Im } \omega_1$. Рассчитано при $m = 1$, $\varepsilon_{ex} = 1$, $\chi_0 = 0$, $\rho_{ex} = 0,001$.

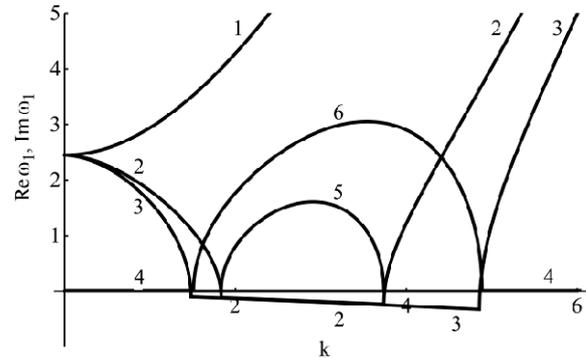


Рис. 3. Зависимость от волнового числа вещественных и мнимых частей частоты волны ω_1 для деформационной моды ($m = 2$). Линии: 1 и 4 – $U = 0$; 2 и 5 – $U = 75$; 3 и 6 – $U = 80$. Линии 1–3 – это $\text{Re } \omega_1$; линии 4–6 – это $\text{Im } \omega_1$. Рассчитано при $m = 2$, $\varepsilon_{ex} = 1$, $\chi_0 = 0$.

развивается в основном под действием капиллярных сил [4], вклад аэродинамических сил незначителен. Короткие капиллярные волны устойчивы.

На рис. 2 приведены те же зависимости, что и на рис. 1, но для изгибающей моды ($m = 1$) капиллярных волн. В качественном отношении ход кривых такой же, как на рис. 1, но при нулевой скорости изгибающая мода остается устойчивой. Как и для осесимметричной моды, с ростом скорости зона неустойчивости увеличивается за счет смещения правой границы зоны неустойчивости, растут и величины инкрементов.

На рис. 3 приведены аналогичные вышеприведенным зависимости для деформационной моды ($m = 2$). В отличие от предыдущих случаев для деформационной моды длинные капиллярные волны устойчивы, то есть малые значения k – это зона устойчивости. Зона неустойчивости появляется в окрестности $k \approx 3$. В этом случае имеем дело с аэродинамической неустойчивостью [22]. При нулевой скорости аэродинамическая неустойчивость, естественно, не реализуется. В остальном влияние скорости движения струи полностью аналогично рассмотренным ранее ситуациям мод с $m = 0$ и $m = 1$.

На рис. 4 представлены зависимости от поверхностной плотности заряда χ_0 вещественной и мнимой частей частоты ω_1 для осесимметричной моды ($m = 0$) капиллярных волн на поверхности струи при различных значениях волнового числа k .

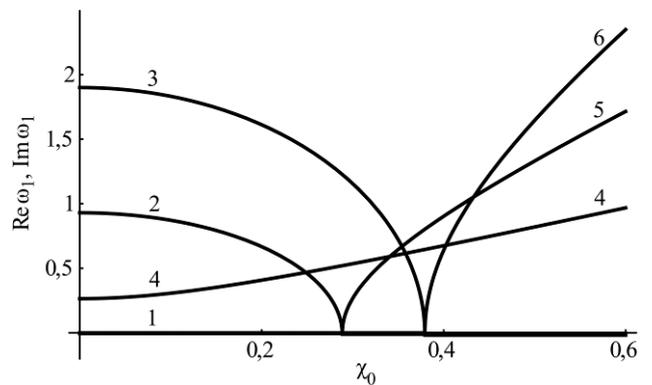


Рис. 4. Зависимость вещественных и мнимых частей частоты ω_1 от поверхностной плотности заряда на струе при различных волновых числах для осесимметричной моды ($m = 0$). Линии: 1 и 4 – $k = 1$; 2 и 5 – $k = 1,5$; 3 и 6 – $k = 2$. Линии 1–3 – это $\text{Re } \omega_1$; линии 4–6 – это $\text{Im } \omega_1$. Рассчитано при $m = 0$, $\varepsilon_{ex} = 1$, $U = 15$, $\rho_{ex} = 0,001$.

Из рис. 4 видно, что при $k = 1$ волна неустойчива на всем диапазоне изменения заряда. Неустойчивость более коротких волн реализуется при превышении зарядом некоторой

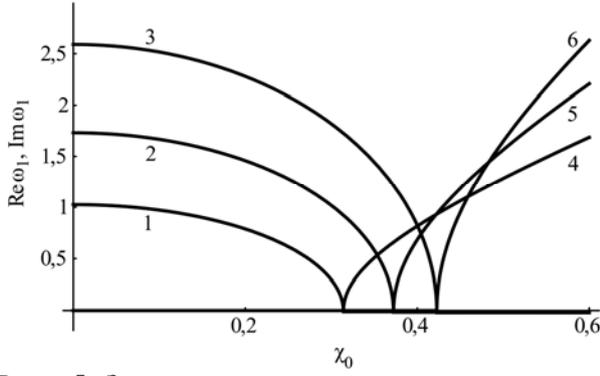


Рис. 5. Зависимость вещественных и мнимых частей частоты ω_1 от поверхностной плотности заряда на струе при различных волновых числах для изгибающей моды ($m = 1$). Линии: 1 и 4 – $k = 1$; 2 и 5 – $k = 1,5$; 3 и 6 – $k = 2$. Линии 1–3 – это $\text{Re } \omega_1$; линии 4–6 – это $\text{Im } \omega_1$. Рассчитано при $m = 1$, $\epsilon_{ex} = 1$, $U = 15$, $\rho_{ex} = 0,001$.

конечной величины. С ростом волнового числа граница реализации неустойчивости смещается в область больших значений плотностей поверхностного заряда.

На рис. 5 и 6 изображены аналогичные зависимости для изгибающей ($m = 1$) и деформационной ($m = 2$) моды. Зависимости частоты ω_1 от зарядового параметра в представленных графиках аналогичны полученным ранее для осесимметричной моды.

Расчеты показывают, что существует и заметная зависимость вещественной и мнимой частей частоты от плотности внешней среды.

УДОВЛЕТВОРЕНИЕ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

Решение для возмущения поверхности должно удовлетворять начальным условиям. Подставим решение для возмущения $\xi^{(1)}$ в начальное условие для возмущения поверхности. Распишем сначала левую часть выражения:

$$\begin{aligned} & \xi^{(1)}(\varphi, z, T_0, T_1) \Big|_{T_0, T_1=0} = \\ & = \sum_{m=0}^{\infty} \int \left((A(T_1) \cdot \exp(im\varphi) + \bar{A}(T_1) \cdot \exp(-im\varphi)) \exp[i(kz - T_0\omega_1(k, m))] + \right. \\ & \left. + (B(T_1) \cdot \exp(im\varphi) + \bar{B}(T_1) \cdot \exp(-im\varphi)) \exp[i(kz + T_0\omega_2(k, m))] \right) dk \Big|_{T_0, T_1=0} = \\ & = \sum_{m=0}^{\infty} \int \left(\exp(im\varphi) (A(T_1) + B(T_1)) \Big|_{T_1=0} + \exp(-im\varphi) (\bar{A}(T_1) + \bar{B}(T_1)) \Big|_{T_1=0} \right) \exp(ikz) dk. \end{aligned} \quad (16)$$

Подставив $\xi^{(1)}$ в левую часть начального условия для возмущения поверхности, умножив полученное равенство на $\exp(im'\varphi)$ и $\exp(-ik'z)$ и интегрируя по z в пределах от $-\infty$ до ∞ , по φ от $-\pi$ до π получим:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ik'z) \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-im'\varphi) \\ & \left(\sum_{m=0}^{\infty} \int \left(\exp(im\varphi) (A(T_1) + B(T_1)) \Big|_{T_1=0} + \right. \right. \end{aligned}$$

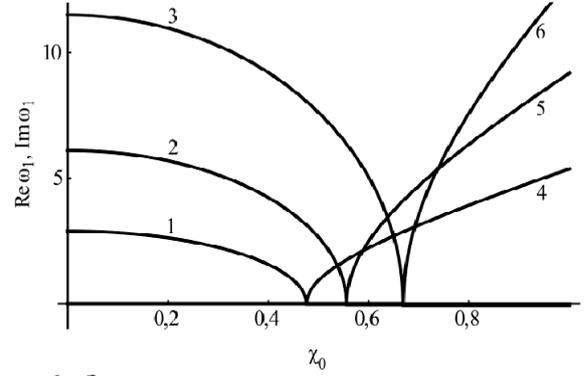


Рис. 6. Зависимость вещественных и мнимых частей частоты ω_1 от поверхностной плотности заряда на струе при различных волновых числах для деформационной моды ($m = 2$). Линии: 1 и 4 – $k = 1$; 2 и 5 – $k = 3$; 3 и 6 – $k = 5$. Линии 1–3 – это $\text{Re } \omega_1$; линии 4–6 – это $\text{Im } \omega_1$. Рассчитано при $m = 2$, $\epsilon_{ex} = 1$, $U = 15$, $\rho_{ex} = 0,001$.

$$\begin{aligned} & + \exp(-im\varphi) (\bar{A}(T_1) + \bar{B}(T_1)) \Big|_{T_1=0} \cdot \exp(ikz) dk \Big) d\varphi dz = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ik'z) \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-im'\varphi) \left(\sum_{l \in \Omega} \sum_{j \in \Xi_l} (\zeta_{l,j} \exp(im_n \varphi) + \bar{\zeta}_{l,j} \exp(-im_n \varphi)) \cdot \exp(ik_l z) \right) d\varphi dz. \end{aligned}$$

Воспользуемся интегральными представлениями δ -функции и δ -символа Кронекера:

$$\delta_{m,n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(m-n)\varphi] d\varphi;$$

$$\delta(|k-k'|) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(k'-k)z] dz$$

и преобразуем выражение (16):

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} \int \left(\delta_{m,m'} (A \cdot \alpha_1(T_1) + B \cdot \alpha_1(T_1)) \Big|_{T_1=0} + \right. \\ & \left. + \delta_{m,-m'} (\bar{A}(T_1) + \bar{B}(T_1)) \Big|_{T_1=0} \right) \delta(|k-k'|) dk = \\ & = \sum_{l \in \Omega} \sum_{j \in \Xi_l} \left(\zeta_{l,j} \delta_{m',m_{l,j}} + \bar{\zeta}_{l,j} \delta_{m',-m_{l,j}} \right) \delta(|k'-k_l|). \end{aligned}$$

Используя свойства δ -функции и δ -символа Кронекера, получим уравнение:

$$\begin{aligned} & \left(A\alpha_{1,k',m'}(T_1) + B\alpha_{1,k',m'}(T_1) + \bar{A}\alpha_{1,k',-m'}(T_1) + \bar{B}\alpha_{1,k',-m'}(T_1) \right) \Big|_{T_1=0} = \\ & = \sum_{l \in \Omega} \sum_{j \in \Xi_l} \zeta_{l,j} \delta_{m',m_{l,j}} \cdot \delta(|k'-k_l|) + \\ & + \sum_{l \in \Omega} \sum_{j \in \Xi_l} \bar{\zeta}_{l,j} \delta_{m',-m_{l,j}} \cdot \delta(|k'-k_l|). \end{aligned} \quad (17)$$

Выполняя аналогичные операции с выражением (2) для производной от $\xi^{(1)}$, запишем второе уравнение:

$$\begin{aligned} & \left(-A\omega_1(k', m') \cdot \alpha_{1,k',m'}(T_1) - \bar{A}\omega_1(k', -m') \cdot \alpha_{1,k',-m'}(T_1) + \right. \\ & \left. + \omega_2(k', m') B\alpha_{1,k',m'}(T_1) + \omega_2(k', -m') \bar{B}\alpha_{1,k',-m'}(T_1) \right) \Big|_{T_1=0} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

В результате решения систем (17) и (18) найдем коэффициенты A, \bar{A}, B, \bar{B} :

$$A = \frac{\omega_2(k, m)}{(\omega_2(k, m) + \omega_1(k, m))} \sum_{l \in \Omega} \sum_{j \in \Xi_l} \zeta_{l,j} \delta_{m, m_{l,j}} \delta(|k - k_l|);$$

$$B = \frac{\omega_1(k, m)}{(\omega_2(k, m) + \omega_1(k, m))} \sum_{l \in \Omega} \sum_{j \in \Xi_l} \zeta_{l,j} \delta_{m, m_{l,j}} \delta(|k - k_l|). \quad (19)$$

Используя (19) и (15), получим окончательный вид решений первого порядка малости, удовлетворяющих начальным условиям:

$$\begin{aligned} \xi^{(1)}(\varphi, z, T_0, T_1) &= \sum_{l \in \Omega} \sum_{j \in \Xi_l} (\alpha_{l,j}(T_1) \exp(i \cdot m_{l,j} \varphi) + \bar{\alpha}_{l,j}(T_1) \exp(-i \cdot m_{l,j} \varphi)) \times \\ &\times (\exp[i(kz - T_0 \omega_1(k, m))] + d_{l,j} \exp[i(kz + T_0 \omega_2(k, m))]) + \kappa.c.; \\ \psi_1^{(1)}(r, \varphi, z, T_0, T_1) &= \\ &= -i \sum_{l \in \Omega} \sum_{j \in \Xi_l} b_{l,j} (\alpha_{l,j}(T_1) \exp(i \cdot m_{l,j} \varphi) + \bar{\alpha}_{l,j}(T_1) \exp(-i \cdot m_{l,j} \varphi)) \times \\ &\times (\exp[i(kz - T_0 \omega_1(k, m))] - \exp[i(kz + T_0 \omega_2(k, m))]) \frac{I_{m_{l,j}}(k_l r)}{I_{m_{l,j}}(k_l)} + \kappa.c.; \\ \psi_2^{(1)}(r, \varphi, z, T_0, T_1) &= \\ &= -i \sum_{l \in \Omega} \sum_{j \in \Xi_l} (\alpha_{l,j}(T_1) \exp(i \cdot m_{l,j} \varphi) + \bar{\alpha}_{l,j}(T_1) \exp(-i \cdot m_{l,j} \varphi)) \times \\ &\times (f_{l,j}^{(1)} \exp[i(kz - T_0 \omega_1(k, m))] - f_{l,j}^{(2)} d_{l,j} \exp[i(kz + T_0 \omega_2(k, m))]) \frac{K_{m_{l,j}}(k_l r)}{K_{m_{l,j}}(k_l)} + \kappa.c.; \\ \Phi^{(1)}(r, \varphi, z, T_0, T_1) &= \\ &= 4\pi\chi \sum_{l \in \Omega} \sum_{j \in \Xi_l} (\alpha_{l,j}(T_1) \exp(i \cdot m_{l,j} \varphi) + \bar{\alpha}_{l,j}(T_1) \exp(-i \cdot m_{l,j} \varphi)) \times \\ &\times (\exp[i(kz - T_0 \omega_1(k, m))] + d_{l,j} \exp[i(kz + T_0 \omega_2(k, m))]) \frac{K_{m_{l,j}}(k_l r)}{K_{m_{l,j}}(k_l)} + \kappa.c. \end{aligned} \quad (20)$$

Чтобы избежать излишней громоздкости, буквами « $\kappa.c.$ » мы обозначили слагаемые, комплексно сопряженные к выписанным. Кроме того, в (20) комплексное сопряжение (при записи внутрисклочных выражений под суммами) обозначено горизонтальной чертой. Для сокращения записи использованы следующие обозначения

$$\begin{aligned} \omega_1(l, j) &\equiv \omega_1(k_l, m_j), \quad \omega_2(l, j) \equiv \omega_2(k_l, m_j); \\ \alpha_{l,j}(T_1) &\equiv \frac{\omega_2(l, j)}{(\omega_2(l, j) + \omega_1(l, j))} \zeta_{l,j}(T_1); \\ d_{i,j} &\equiv \frac{\omega_1(l, j)}{\omega_2(l, j)}; \quad b_{i,j} \equiv \frac{\omega_1(l, j)}{g_{m_{l,j}}(k_l)}; \\ f_{l,j}^{(1)} &\equiv \frac{\omega_1(l, j) + k_l U}{h_{m_{l,j}}(k_l)}; \quad f_{l,j}^{(2)} \equiv \frac{\omega_2(l, j) - k_l U}{h_{m_{l,j}}(k_l)}. \end{aligned} \quad (21)$$

ОЦЕНКА ХАРАКТЕРНОГО ВРЕМЕНИ РАЗВИТИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Знание решений первого порядка малости, удовлетворяющих начальным условиям, позво-

ляет провести разумные оценки характерного времени развития неустойчивости струи при появлении у частот мнимых компонент.

Исходить будем из выражения (20) возмущения равновесной поверхности струи:

$$\begin{aligned} \xi^{(1)}(\varphi, z, T_0, T_1) &= \\ &= \sum_{l \in \Omega} \sum_{j \in \Xi_l} (\alpha_{l,j}(T_1) \exp(i \cdot m_{l,j} \varphi) + \bar{\alpha}_{l,j}(T_1) \exp(-i \cdot m_{l,j} \varphi)) \times \\ &\times (\exp[i(kz - T_0 \omega_1(k, m))] + d_{l,j} \exp[i(kz + T_0 \omega_2(k, m))]) + \kappa.c. \end{aligned}$$

В этом выражении следует прежде всего оценить порядок величины коэффициентов $d_{l,j}$ и $\alpha_{i,j}(T_1)$ согласно (21). Подставив $\omega_1(k_l, m_j)$ и $\omega_2(k_l, m_j)$ из (21) в выражения для $d_{l,j}$ и $\alpha_{i,j}(T_1)$ с учетом того, что для струи жидкости в воздухе при нормальных условиях $\gamma_m(k) \ll 1$ и несложно найти:

$$\alpha_{i,j}(T_1) \equiv \frac{\sqrt{\omega_0^2 + 0,25(kU\gamma_m(k))^2} - \frac{1}{2}kU\gamma_m(k)}{2\sqrt{\omega_0^2 + 0,25(kU\gamma_m(k))^2}} \zeta_{l,j}(T_1) \approx$$

$$\approx \left[\frac{1}{2} - \frac{kU\gamma_m(k)}{4\omega_0 \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{kU\gamma_m(k)}{2\omega_0} \right)^2 \right)} \right] \zeta_{l,j}(T_1) \approx \frac{\zeta_{l,j}(T_1)}{2};$$

$$d_{i,j} \equiv \frac{\omega_1(l, j)}{\omega_2(l, j)} \approx 1 + \frac{kU\gamma_m(k)}{\omega_0} \approx 1.$$

Далее получим:

$$\begin{aligned} \xi^{(1)}(\varphi, z, T_0, T_1) &\sim \\ &\sim \zeta_{l,j}(T_1) (\exp[i(kz - T_0 \omega_1(k, m))] + \exp[i(kz + T_0 \omega_2(k, m))]) + \kappa.c. \sim \\ &\sim \zeta_{l,j} \cdot \exp[i(kz + T_0 \omega_2(k, m))]. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что, хотя выражения (20) определены в виде сумм по волновым и азимутальным числам начального возмущения, все же очевидно: характерное время определится волной с максимальным инкрементом. Различие начальных амплитуд отдельных волн может играть роль только при равенстве инкрементов.

Когда частота волны становится комплексной, то ее амплитуда начнет расти по порядку величины по закону:

$$\xi^{(1)}(\varphi, z, t_1) \sim \zeta_{l,j} \cdot \exp[t \cdot \text{Im} \omega_0(k, m)]. \quad (22)$$

Проведем оценку характерного времени отделения капли от струи (времени реализации неустойчивости нулевой азимутальной моды ($m = 0$)). Следует отметить, что отрыв капли от струи происходит за счет реализации неустойчивости осесимметричной ($m = 0$) моды (перетяжечной) капиллярных волн (так как неустойчивость изгибной моды ведет лишь к изгибу, а неустойчивость деформационной – к деформации).

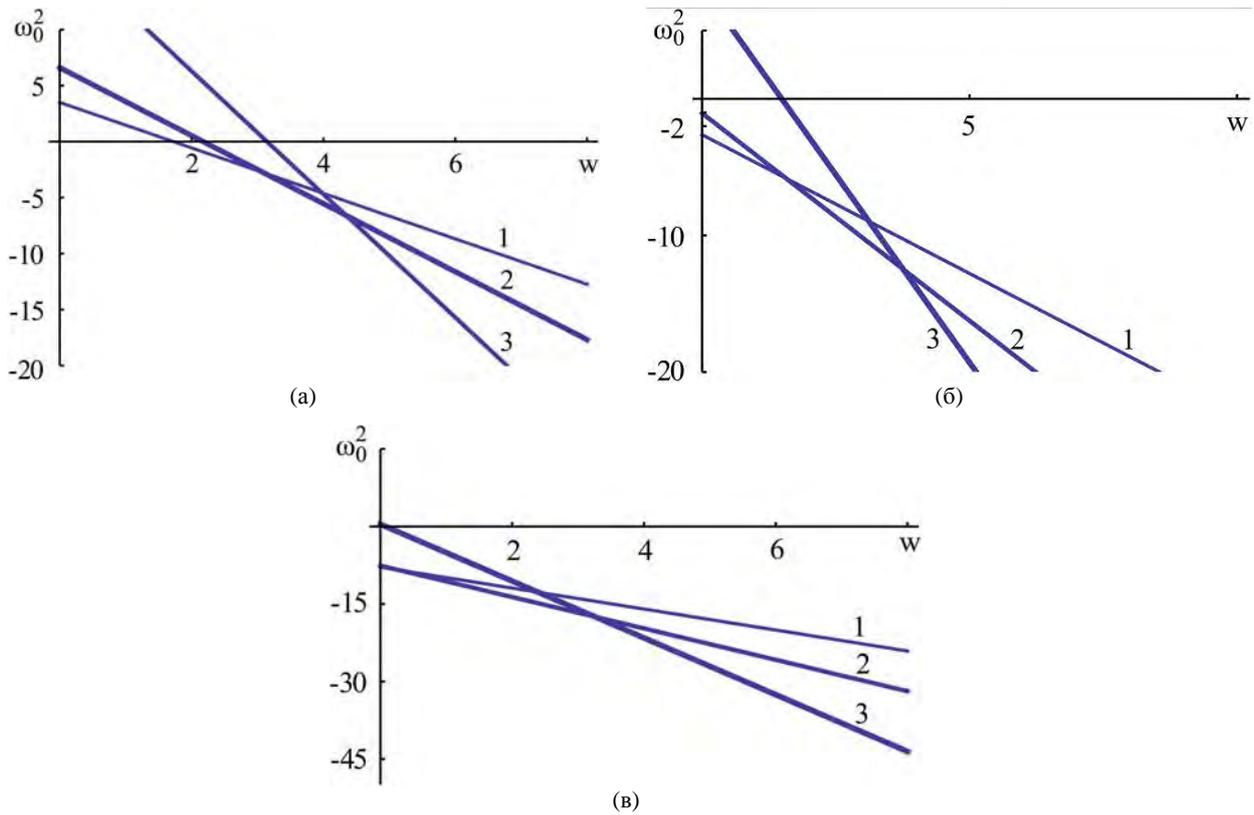


Рис. 7. Зависимость ω_0^2 от величины зарядового параметра W для первых трех азимутальных мод и различных значений параметра Вебера, рассчитанная при $k = 2$; $\rho_{ex} = 0,001$, $\epsilon_d = 1$. Кривая 1 соответствует $m = 0$; кривая 2 – $m = 1$; кривая 3 – $m = 2$. (а) $We = 0,3$; (б) $We = 3$; (в) $We = 5,3$.

Выражение (22) записано в безразмерном виде. При принятом обезразмеривании амплитуда начальной деформации ζ , как и текущая амплитуда ξ , обезразмеривается делением на радиус струи R , инкремент и частота волны – делением на комбинацию $\omega_* \equiv \sqrt{\sigma / \rho_{in} R^3}$, а время – делением на обратную комбинацию $t_* \equiv \sqrt{\rho_{in} R^3 / \sigma}$. Таким образом, величина единицы обезразмеривания времени будет зависеть от радиуса струи, плотности и величины коэффициента поверхностного натяжения.

Как показывают оценки по порядку величины, начальная амплитуда капиллярных волн на струе $\sim \sqrt{kT / \sigma}$ [15], или $\sim 0,1$ нм. Тогда для струи воды радиуса $R = 1$ мм получим $\omega_* \approx 2 \cdot 10^2$ сек⁻¹, а $t_* \approx 5 \cdot 10^{-3}$ сек. Если радиус струи уменьшить в десять раз, то единицы обезразмеривания частоты и времени изменятся $\omega_* \sim 10^4$ сек⁻¹, $t_* \sim 10^{-4}$ сек.

При радиусе струи R характерное время отрыва капли τ определится временем, пока растущая амплитуда капиллярной волны на поверхности струи не станет $\approx R$.

$$\xi^{(1)}(\varphi, z, t_1) \approx R \approx \zeta_{l,j} \cdot \exp[\tau \cdot \text{Im} \omega_0(k, m)]$$

или

$$\tau \sim \frac{1}{\text{Im} \omega_0(k, m)} \cdot \ln \frac{R}{\zeta_{l,j}}. \quad (23)$$

В этом выражении τ получается в безразмерном виде. Чтобы перейти к размерным единицам, нужно данное τ умножить на t_* . В итоге для струи радиуса $R = 1$ мм при $\text{Im} \omega_0 = 1,6$ найдем $\tau \sim 10$, в размерном виде $\tau \sim 5 \cdot 10^{-2}$ сек, а для струи с $R = 0,1$ мм получим $\tau \sim 10^{-3}$ сек. Поскольку зрительное восприятие человека инерционно (человек не воспринимает процессы, происходящие быстрее, чем за 0,1 сек [23]), то процесс отрыва капли от струи таких радиусов (и более тонких) замечен не будет. Визуально будут восприниматься неподвижная струя и поток капель. Для струй с радиусами $R > 3$ мм отрыв капель от струи будет замечен. Естественно, что оценки зависят от величины принятого инкремента (величина $\text{Im} \omega_0 = 1,6$ была принята для упрощения алгебраических оценок), но такие численные величины мнимых компонент частоты по порядку величины следуют из рис. 1 и 2 и при его изменении будут меняться.

КРИТИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Из (14) и (23) следует, что критические условия реализации неустойчивости в нулевом порядке по отношению $(kU\gamma_m(k))^2 / \omega_0^2$ определяются условиями прохождения ω_0^2 из области положительных значений в область отрицательных. В этой связи на рис. 7 приведены зави-

симости ω_0^2 от $w \equiv 4\pi\epsilon_d \cdot \chi_0^2$ для первых трех азимутальных чисел при различных значениях $We \equiv \rho_{ex} U^2$. Там, где $\omega_0^2 > 0$, капиллярные волны устойчивы, а там, где $\omega_0^2 < 0$, их амплитуда нарастает экспоненциально со временем. Из рис. 7 ясно видно, что очередность реализации неустойчивости различных азимутальных мод зависит от величин зарядового параметра w и параметра Вебера We . Так, при больших значениях w различные азимутальные моды возбуждаются в порядке очередности: от младшей к старшей независимо от величины We . При малых значениях w порядок возбуждения этих мод меняется: в зависимости от величины w – первой может возбудиться изгибная мода или деформационная. Следующая за ней возбуждающаяся мода также может быть произвольной. Это обстоятельство приводит к большому разнообразию режимов электродиспергирования жидкости [9–11].

ВОЗМОЖНОСТЬ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ПРОВЕРКИ ПОЛУЧЕННЫХ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Проведенное исследование ориентировано на физическое истолкование экспериментов, описанных в [8–9, 11, 14]. Во всяком случае целенаправленные эксперименты по проверке закономерностей возбуждения моды с $m = 2$ еще не поставлены. Режим ветвящихся струй, обнаруженный экспериментально в [8], воспроизведенный в [9, 11], воспринимался как пограничный режим, реализующийся при весьма высоких напряжениях и никак не связанный с азимутальной модой $m = 2$. Теперь на основе приборов типа использованных в [8–9, 11, 14] его можно изучить досконально.

Для экспериментальной проверки закономерностей отрыва капли от струи можно воспользоваться оборудованием, аналогичным описанному в [24–26].

В общем случае проведение экспериментального исследования закономерностей устойчивости струи при начальном возбуждении совокупности или отдельных мод возможно было бы на оборудовании, описанном в [27].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решена задача расчета капиллярного волнового движения в заряженной струе идеальной несжимаемой жидкости, движущейся с постоянной скоростью относительно идеальной непроницаемой материальной среды, когда начальная деформация поверхности струи определена

целым набором волн с произвольными волновыми и азимутальными числами. Найдены удовлетворяющие начальным условиям аналитические выражения для нахождения временной эволюции гидродинамических потенциалов в струе и среде, а также электрического потенциала в окрестности струи. Получено аналитическое выражение для характерного времени отрыва капли от струи. Исследована очередность возбуждения различных азимутальных мод.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kelvin Lord W. *Lond Edinb Dubl Phil Mag. Series 4.* 1871, **42**, 368–374.
2. Strutt J.W. (Lord Rayleigh). *Proc of the London Math. Soc.*, 1878, **10**, pp. 4–13.
3. Basset A.B. *Amer J Math.*, 1894, **16**, 93–110
4. Левич В.Г. *Физико-химическая гидродинамика*. М.: Физматгиз, 1959. 700 с.
5. Taylor G. *Proc Roy Soc.* 1969, **A313**, 453–470.
6. Ентов В.М., Ярин А.Л. *Итоги науки и техники. Серия «Механика жидкости и газа»*. 1984, **17**, 112–197.
7. Eggers J. *Rep Prog Phys.* 2008, **71**(036), 1–79.
8. Cloupeau M., Prunet Foch B. *J Electrostatics.* 1990, **25**, 165–184.
9. Cloupeau M., Prunet Foch B. *J Aerosol Sci.* 1994, **25**(6), 1021–1035.
10. Shiryayeva S.O., Grigor'ev A.I. *J Electrostatics.* 1995, **34**, 51–59.
11. Jaworek A., Krupa A. *J Aerosol Sci.* 1999, **30**(7), 873–893.
12. Ширяева С.О. *ЖТФ*, 2010, **80**(4), 24–32.
13. Григорьев А.И. *ЖТФ*, 2009, **79**(4), 36–45.
14. Kim O.V., Dunn P.F. *Langmuir.* 2010, **26**, 15807–15813.
15. Френкель Я.И. *ЖЭТФ*, 1936, **6**(4), 348–350.
16. Жакин А.И. *ЭОМ*. 2017, **53**(2), 21–37.
17. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Гидродинамика*. М.: Наука, 1986. 736 с.
18. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теория поля*. М.: Наука, 1973. 504 с.
19. Nayfeh A.H. *J Fluid Mech.* 1971, **48**(3), 463–475.
20. Найфе А.Х. *Методы возмущений*. М.: Мир, 1976. 455 с.
21. Абрамовиц М., Стиган И. *Справочник по специальным функциям*. М.: Наука, 1979. 830 с.
22. Григорьев А.И., Михеев Г.Е., Ширяева С.О. *Изв. РАН. МЖТ*, 2017, (5), 3–14.
23. Луизов А.В. *Глаз и свет*. Л.: Энергоатомиздат, 1983. 140 с.
24. Duft D., Lebbeus H., Huber B.A. *Phys Rev Lett.* 2002, **89**(8), 1–4.
25. Duft D., Achtzehn T., Muller R. et al. *Nature.* 2003, **421**(919), 128.

26. Grimm R.L., Beauchamp J.L. *J Phys Chem.* В. 2005, **109**, 8244–8250.
27. Аметистов Е.В., Блаженков В.В., Городов А.К. и др. *Монодиспергирование вещества: принципы и применение.* Под ред. В.А. Григорьева. М.: Энергоатомиздат, 1991. 336 с.

Поступила 19.03.18

После доработки 30.04.18

Summary

A solution to the problem of the calculation of temporary evolution of amplitudes of capillary waves of any symmetry on a surface of the charged cylindrical jet of

ideal incompressible conductive liquid, moving relative to an ideal incompressible dielectric medium is offered, with an account of multimode initial conditions. Analytical expressions for temporary evolution of amplitudes of waves on a jet, amplitude values of hydrodynamic potential of fields of speeds are found in a jet as well as the electric potential of the field in the neighborhood of a jet. An assessment of the characteristic time of separation of a drop from a jet is carried out.

Keywords: charged jet, external environment, initial conditions, azimuthal symmetry, instability, drop.