

# О кольцевых волнах на поверхности проводящей жидкости во внешнем однородном электростатическом поле и в электрическом пробое

\*С. О. Ширяева, А. И. Григорьев, К. И. Орлова

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
г. Ярославль, 150003, Россия, \*e-mail: shir@uniyar.ac.ru

Выведено соотношение для связи частоты кольцевых капиллярно-гравитационных волн на поверхности проводящей жидкости во внешнем однородном электростатическом поле с физическими параметрами задачи и с аналогом волнового числа. Показано, что полученное соотношение имеет формально такой же вид, как дисперсионное уравнение для плоских волн, однако в рассматриваемом случае волновое число в качестве характеристики кольцевых волн теряет свой смысл в силу неопределенности понятия длины волны. Рассмотрена возможность реализации электрического разряда с однородно заряженной во внешнем электростатическом поле поверхности жидкости при падении на нее капля той же жидкости.

*Ключевые слова:* кольцевые волны, длина волны, внешнее однородное электростатическое поле, электрический разряд.

УДК 534.1:537.525.4

DOI: 10.5281/zenodo.1168343

Кольцевые гравитационные и капиллярные волны возникают в различных физических ситуациях, например при падении тел, в частности, капля дождя на водную поверхность рек, озер или капли молока на поверхность чая в чашке (см., например, [1–6] и указанную там литературу). Кольцевые волны появляются в бассейнах, в плоском мениске на торце труб кольцевого сечения, заполненных жидкостью [7]. В этой связи данный объект неоднократно исследовался экспериментально и теоретически, в частности, см. [8, с. 368; 9, с. 510; 10]. Может сложиться впечатление, что кольцевые волны только формой отличаются от плоских, которые исследованы значительно подробнее [11–14]. Однако в [8] амплитуда кольцевых волн не постоянна, а уменьшается с увеличением расстояния от общего центра. У них также не постоянна длина волны, то есть понятие «волнового числа» не определено. Следовательно, и понятие дисперсионного уравнения к данным волнам не применимо.

## ФИЗИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть идеальная несжимаемая проводящая жидкость с массовой плотностью  $\rho$  и коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$  заполняет в поле сил тяжести  $\vec{g}$  нижнее полубесконечное пространство. В верхнем полупространстве, заполненном диэлектрической средой с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon = 1$  и пренебрежимо малой плотностью, существует однородное электростатическое поле напряженностью  $\vec{E}_0$ .

Пусть по свободной, заряженной индуцированным зарядом поверхности жидкости распространяются кольцевые волны от упавшей в начальный момент времени капли. Плоскость  $Oxy$  совпадает с равновесной плоской поверхностью жидкости. Рассмотрение проведем в цилиндрической системе координат, ось  $Oz$  которой направим вертикально вверх коллинеарно ускорению силы тяжести  $\vec{g}$ . Жидкость занимает нижнее полупространство  $z < 0$ .

Поверхность жидкости, возмущенной волновым движением, опишем уравнением  $z = \zeta(r, \phi, t)$  – вертикальное отклонение свободной поверхности жидкости от равновесного положения  $z = 0$ . Максимальное значение  $|\zeta(r, \phi, t)|$  будем считать малой величиной и рассмотрим задачу в линейном приближении по малому параметру – безразмерному значению величины  $\varepsilon \equiv \max |\zeta(r, \phi, t)| / \beta$ , где  $\beta \equiv \sqrt{\sigma / \rho g}$  – капиллярная постоянная жидкости. Порядок малости по  $\varepsilon$  отметим верхним индексом в скобках: нулем либо единицей. Поле скоростей волнового течения жидкости обозначим  $\vec{V}(\vec{r}, t)$ , а напряженность электрического поля  $u$  возмущенной волновым движением поверхности жидкости –  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ , причем  $\vec{E}(\vec{r}, t) \parallel \vec{n}(\vec{r}, t)$ , где  $\vec{n}(\vec{r}, t) \equiv \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \Big|_{F=0}$  – вектор единичной нормали к возмущенной волновым движением поверхности жидкости, общее уравнение которой записывается в виде:

$$F(\vec{r}, t) \equiv z - \zeta(r, \phi, t) = 0.$$

Математическая формулировка задачи гласит:

$$\operatorname{div} \vec{V}(\vec{r}, t) = 0;$$

$$\frac{\partial \vec{V}(\vec{r}, t)}{\partial t} + (\vec{V}(\vec{r}, t), \nabla) \vec{V}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{\rho} \nabla P(\vec{r}, t) + \vec{g}; \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}, t) = 0; \quad \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) = 0, \quad (2)$$

с граничными условиями:

$$z \rightarrow \infty: \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0; \quad z \rightarrow -\infty: \vec{V}(\vec{r}, t) \rightarrow 0;$$

$$r = 0: \vec{E}(\vec{r}, t) < \infty; \quad \vec{V}(\vec{r}, t) < \infty;$$

$$z = \zeta(r, \phi, t): \vec{V}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n}(\vec{r}, t) = \frac{\partial \zeta(r, \phi, t)}{\partial t};$$

$$P(\vec{r}, t) - P_{амм} + P_E(\vec{r}, t) = P_\sigma(\vec{r}, t), \quad (3)$$

где  $P_{амм}$  – постоянное внешнее давление и  $P(\vec{r}, t)$  – поле гидродинамического давления;  $P_\sigma(\vec{r}, t)$  – давление сил поверхностного натяжения:  $P_\sigma(\vec{r}, t) = \sigma \cdot \operatorname{div} \vec{n}(\vec{r}, t)$ ;  $P_E(\vec{r}, t)$  – давление электростатического поля:  $P_E(\vec{r}, t) = E(\vec{r}, t)^2 / 8\pi$ .

Условие отсутствия касательной компоненты вектора напряженности электрического поля на поверхности жидкости:

$$E_\tau(\vec{r}, t) = \vec{\tau}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 0; \quad (4)$$

где  $\vec{\tau}(\vec{r}, t)$  – единичный вектор касательной к поверхности жидкости.

### СКАЛЯРИЗАЦИЯ И ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ

Введем в рассмотрение потенциал электрического поля [15] на основе соотношения  $E(\vec{r}, t) = -\nabla \Phi(\vec{r}, t)$ , а также гидродинамический потенциал (поскольку жидкость принимается идеальной и несжимаемой) [11] на основе соотношения  $\vec{V}(\vec{r}, t) = \nabla \psi(\vec{r}, t)$ . Примем во внимание то обстоятельство, что  $\psi(\vec{r}, t)$  – гидродинамический потенциал в безразмерных переменных (например, когда  $\rho = \sigma = g = 1$ ) имеет тот же порядок малости, что и возмущение поверхности  $\zeta(r, \phi, t)$ , поскольку оно формируется волновым движением жидкости.

Возмущение свободной поверхности  $\zeta(r, \phi, t)$ , гидродинамический и электрический потенциалы  $\psi(\vec{r}, t)$  и  $\Phi(\vec{r}, t)$  представим в виде разложения по малому параметру  $\varepsilon$  в виде:

$$\zeta(r, \phi, t) = \zeta^{(1)}(r, \phi, t) + O(\varepsilon^2);$$

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi^{(1)}(\vec{r}, t) + O(\varepsilon^2);$$

$$\Phi(\vec{r}, t) = \Phi^{(0)}(\vec{r}) + \Phi^{(1)}(\vec{r}, t) + O(\varepsilon^2).$$

Верхние индексы в скобках отмечают порядок малости.

Решения сформулированной ниже задачи (5)–(8) также будем искать в виде разложения по малому параметру. Электростатический и гидродинамический потенциалы в силу уравнений (1)–(2) будут решениями уравнений Лапласа:

$$\Delta \Phi^{(1)}(\vec{r}, t) = 0; \quad \Delta \psi^{(1)}(\vec{r}, t) = 0. \quad (5)$$

Интегрируя уравнение Эйлера, получим выражение для гидродинамического давления в жидкости:

$$P(\vec{r}, t) = P_0 - \rho \frac{\partial \psi^{(1)}(\vec{r}, t)}{\partial t} - g\rho z.$$

Граничные условия переписутся в виде:

$$z \rightarrow \infty: \Phi(\vec{r}, t) = -E_0 z;$$

$$z \rightarrow -\infty: \psi^{(1)}(\vec{r}, t) \rightarrow 0;$$

$$r = 0: \Phi(\vec{r}, t) < \infty; \quad \psi^{(1)}(\vec{r}, t) < \infty. \quad (6)$$

В линейном приближении кинематическое и динамическое граничные условия (3) и условие эквипотенциальности (4) поверхности проводящей жидкости отнесем к невозмущенной поверхности:

$$z = 0: \frac{\partial \psi^{(1)}(\vec{r}, t)}{\partial z} \approx \frac{\partial \zeta^{(1)}(r, \phi, t)}{\partial t};$$

$$\left( P_0 - \rho \frac{\partial \psi^{(1)}(\vec{r}, t)}{\partial t} - g\rho \zeta^{(1)}(r, \phi, t) \right) - \quad (7)$$

$$-P_{\dot{\alpha}\dot{\alpha}i} + \frac{\left[ \nabla \left( \Phi^{(0)}(\vec{r}) + \Phi^{(1)}(\vec{r}, t) \right) \right]^2}{8\pi} = P_\sigma(\vec{r}, t);$$

$$\Phi^{(0)}(\vec{r}) + \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial z} \xi^{(1)}(\vec{r}, t) + \Phi^{(1)}(\vec{r}, t) = \text{const};$$

где давление сил поверхностного натяжения  $P_\sigma(\vec{r}, t)$  запишем в виде:

$$P_\sigma(\vec{r}, t) = \sigma \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta^{(1)}(r, \phi, t)}{\partial r} - \frac{\partial^2 \zeta^{(1)}(r, \phi, t)}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \zeta^{(1)}(r, \phi, t)}{\partial \phi^2} \right). \quad (8)$$

Подставив (8) в (7), запишем динамическое граничное условие:

$$z = 0: \quad P_0 - \rho \frac{\partial \psi^{(1)}(\vec{r}, t)}{\partial t} - g\rho \zeta^{(1)}(r, \phi, t) -$$

$$-P_{амм} + \frac{E_0^2}{8\pi} - \frac{1}{8\pi} 2E_0 \frac{\partial \Phi^{(1)}(\vec{r}, t)}{\partial z} =$$

$$= \sigma \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta^{(1)}(r, \phi, t)}{\partial r} - \frac{\partial^2 \zeta^{(1)}(r, \phi, t)}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \zeta^{(1)}(r, \phi, t)}{\partial \phi^2} \right). \quad (9)$$

В нулевом порядке малости получим равновесное состояние:

$$\Phi^{(0)}(\vec{r}) = -E_0 z; \quad P^{(0)}(\vec{r}) = P_{амм} - \rho g z - \frac{E_0^2}{8\pi}.$$

В первом порядке малости решения уравнений (5), удовлетворяющие условиям (6) на  $\pm\infty$  и в начале координат, получим в виде:

$$\zeta^{(1)}(r, \phi, t) = \alpha(t) \cdot \exp(im\phi) \cdot J_m(kr); \quad (10)$$

$$\psi^{(1)}(\bar{r}, t) = \frac{\alpha'(t)}{k} \cdot \exp(im\phi) \cdot \exp(kz) \cdot J_m(kr); \quad (11)$$

$$\Phi^{(1)}(\bar{r}, t) = E_0 \times \alpha(t) \times \exp(im\phi) \times \exp(-kz) \times J_m(kr); \quad (12)$$

$$P_E^{(1)}(\bar{r}, t) = \frac{k}{4\pi} \cdot \alpha(t) \cdot E_0^2 \cdot \exp(im\phi) \cdot \exp(-kz) \cdot J_m(kr); \quad (13)$$

где  $\alpha(t)$  – функция, описывающая зависимость амплитуды возмущения от времени;  $k$  – константа. Подставляя выражения (10)–(13) в динамическое граничное условие, получаем эволюционное уравнение в виде дифференциального уравнения второго порядка для определения временной эволюции амплитуды возмущения:

$$\alpha''(t) + \alpha(t) \left[ gk - \frac{k}{4\pi} E_0^2 \frac{k}{\rho} - \frac{\sigma k}{\rho} \right] = 0.$$

Решение этого дифференциального уравнения ищем в виде:

$$\alpha(t) = a \cdot \exp(i\omega t);$$

где  $a$  – константа.

Подставляя это выражение в эволюционное уравнение, получим аналог дисперсионного уравнения:

$$\omega^2 = gk + \frac{\sigma k^3}{\rho} - \frac{E_0^2 k^2}{4\pi \rho}; \quad (14)$$

но  $k$  в этом равенстве имеет смысл константы разделения (при решении уравнений (5) методом разделения переменных) с размерностью  $\text{см}^{-1}$ , а не волнового числа, как в случае плоских волн. Уравнение (14) следует принимать лишь как связывающее частоту волн с физическими параметрами системы и параметром разделения.

Следует добавить, что понятие длины волны в классическом его определении как расстояние между двумя последовательными максимумами или минимумами в случае кольцевых волн приводит к некорректности, так как оно не постоянно, а увеличивается при удалении от начала координат, что приводит к некорректности в определении понятия волнового числа.

Вообще говоря, константа  $k$  входит в решения уравнений (5) через выражения вида:

$$\exp(\pm kz) \times J_m(kr),$$

то есть определяет скорость убывания амплитуд решений с ростом  $r$  и  $z$ . При произвольном, но постоянном  $k$  на расстоянии  $z = k^{-1}$  в глубину жидкости происходит уменьшение амплитуды (например, гидродинамического потенциала) в  $e$

раз и можно говорить о физическом смысле  $k$  как об обратной величине расстояния, на котором амплитуды уменьшаются в  $e$  раз.

### КРИТИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

Говоря о критических условиях реализации электростатической неустойчивости поверхности жидкости, следует иметь в виду, что в отличие от классической неустойчивости Тонкса-Френкеля [16–17] в рассматриваемом случае поправка первого порядка малости к отрицательному (то есть действующему в сторону, противоположную силе тяжести) давлению внешнего электростатического поля  $\vec{E}_0$  на поверхность жидкости радиально симметрично убывает с увеличением расстояния до начала координат (13). Это, несомненно, скажется на закономерностях реализации электростатической неустойчивости, которая будет иметь место в области с максимальным электростатическим давлением, то есть в малой окрестности начала координат.

Классическая неустойчивость Тонкса-Френкеля – неустойчивость плоской поверхности проводящей жидкости в перпендикулярном к ней однородном электростатическом поле по отношению к капиллярным волнам тепловой амплитуды. Говоря о тепловых волнах, имеют в виду волны, порождаемые тепловым движением молекул жидкости [17]. Амплитуда таких волн порядка  $\sqrt{kT/\sigma}$ , где  $k$  – постоянная Больцмана;  $T$  – абсолютная температура. При температурах порядка комнатной тепловая амплитуда для любых жидкостей меньше ангстрема.

Условия реализации неустойчивости Тонкса-Френкеля определяются выражением [17]:

$$W_{TF}^* = \beta k_f + (\beta k_f)^{-1}; \quad W_{TF} = \frac{E_0^2}{4\pi\sqrt{\rho g \sigma}}; \quad (15)$$

где  $W_{TF}^*$  – безразмерный параметр Тонкса-Френкеля;  $k_f$  – волновое число плоской волны.

Выражение, стоящее в правой части первого равенства в (15), достигает минимума при  $\beta k_f = 1$ . Следовательно, критическое значение параметра Тонкса-Френкеля  $W_{TF}$  равно двум.

Согласно проделанным выше расчетам, критическое условие для реализации электростатической неустойчивости плоской заряженной поверхности жидкости в цилиндрическом бассейне, в котором из-за граничных условий будут возникать кольцевые волны, имеющие тепловую природу, как и в [17], будет таким же.

В задаче же об электростатической устойчивости заряженной плоской поверхности

жидкости при падении в нее капли (камня) кольцевые волны образуются не за счет теплового движения молекул, а за счет кинетической энергии капли (камня). Критические условия реализации неустойчивости поверхности жидкости определяются высотой и шириной всплеска капли в месте падения.

Согласно принятой модели, жидкость – идеально проводящая, и поверхностная плотность индуцированного заряда на вершине всплеска (следовательно, и напряженность поля у вершины всплеска) многократно (в зависимости от ширины и высоты всплеска) увеличится [18], что и приведет к пробое [19–20].

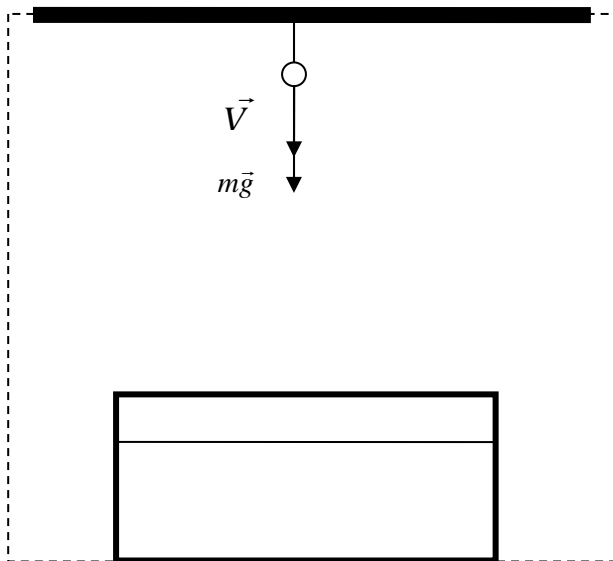


Рис. 1. Формальная схема рассматриваемого явления.

Для конкретности рассмотрим систему, изображенную на рис. 1, что примерно соответствует установке, использованной в [3]. Отличие от [3] только в наличии внешнего электростатического поля  $\vec{E}_0$ . В остальном принимается, что капля воды радиусом  $R = 0,2$  см падает с высоты 100 см на горизонтальную поверхность воды. В момент столкновения с жидкой поверхностью капля имеет (по экспериментальным измерениям) скорость 3,8 м/с (если капля воды такого радиуса падает из облака, ее скорость у земли равна 8,83 м/с [21, с. 260]). При столкновении капли с водой вверх выстреливается кумулятивная струйка, см., например, [22–23] или рис. 2 и 3 (фотографий, подобных рис. 3, много в [22]). Напряженность внешнего электростатического поля у вершины такой струйки (при размерах струйки, приведенной на рис. 3) примерно на порядок будет превышать напряженность у поверхности жидкости вдали от всплеска. Пробой воздуха происходит при  $E \sim 26$  кВ/см [24]. А значит, что пробой воздуха над всплеском может произойти уже при  $E \sim 2\div 3$  кВ/см. Это, конечно, большая напряженность электро-

статического поля, но вполне достижимая уже в природных условиях [25, с. 440].

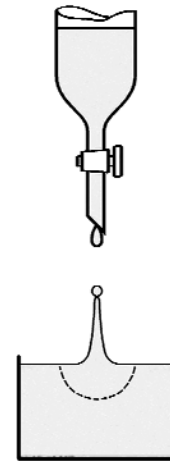


Рис. 2. Схема опыта по образованию кумулятивной струйки.



Рис. 3. Фотография кумулятивной струйки воды и кольцевых волн на ее поверхности, возникающих на месте падения капли. (Взято из Интернета: <http://oformi.net/upload/gallery/main/11/wd16.jpg>).

В параметр Тонкса-Френкеля  $W_{TF}^*$  напряженность  $E_0$  входит в квадрате. Следовательно, величина параметра  $W_{TF}^*$  у вершины кумулятивной струйки примерно на два порядка величины превысит таковую у горизонтальной поверхности жидкости. И критическое значение для  $W_{TF}^*$  будет на два порядка меньше, чем у плоской поверхности.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выяснилось, что уравнение, связывающее частоту кольцевых волн с физическими параметрами системы, формально полностью совпадает с дисперсионным уравнением для плоских капиллярно-гравитационных волн как при наличии внешнего однородного электрического поля, так и без него. Однако длина кольцевых волн не является постоянной величиной.

Различие в свойствах плоских и кольцевых волн в идеальной жидкости связано с тем, что плоские волны одномерны и для них сумма кинетической и потенциальной энергии сохраняется при сохранении их формы. Кольцевые же волны двумерны и расходятся от начала координат.

нат, следовательно, закон сохранения энергии требует уменьшения их высоты и снижения скорости по мере удаления от начала координат.

Критические условия реализации неустойчивости заряженной поверхности жидкости при падении на нее капли во внешнем однородном электростатическом поле оказываются существенно ниже критических условий реализации неустойчивости Тонкса-Френкеля.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 14-01-00170-а.*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Craye C., Sobieski P.V., Bliven L.F., Guissard A. *IEEE J. of Oceanic Engineering*. 1999, **24**(3), 323–332.
2. Kartashov Ya.V., Visloukh V.A., Torner L. *Optics express*. 2007, **15**(24), 16216–16221.
3. Чашечкин Ю.Д., Прохоров В.Е. *ДАН*. 2013, **451**(1), 41–45.
4. Bahni Ray, Gautam Biswas, Ashutosh Sharm. *J Fluid Mech*. 2015, **768**, 492–523.
5. Nils Paul van Hinsberg, Marie Charbonneau-Grandmaison. *Phys Rev E*. 2015, **92**, 013004 1–12.
6. Чашечкин Ю.Д., Прохоров В.Е. *ЖЭТФ*. 2016, **49**(4), 864–475.
7. Григорьев А.И. *ЖТФ*. 2007, **77**(2), 31–40.
8. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. *Уравнения в частных производных математической физики*. М.: Высшая школа, 1970. 712 с.
9. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. *Теоретическая механика*. Ч. 1. М.: Физматиздат, 1963. 584 с.
10. Безручко Б.П., Диканев Т.В., Захаревич А.М. *Гравитационно-капиллярные волны на поверхности жидкости*. Саратов: ГосУНЦ «Колледж», 2003. 17 с.
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика. Гидродинамика*. Т. 7. М.: Наука, 1986. 733 с.
12. Сретенский Л.Н. *Теория волновых движений жидкости*. М.: Наука, 1977. 815 с.
13. Черкесов Л.В. *Введение в гидродинамику и теорию волн*. Санкт-Петербург: Гидрометеоздат, 1992. 264 с.
14. Бреховских Л.М., Гончаров В.В. *Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн)*. М.: Наука, 1982. 336 с.
15. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика. Теория поля*. Т. 2. М.: Наука, 1973. 504 с.
16. Tonks L. *Phys. Rev.* 1935, **48**, 562–568.
17. Френкель Я.И. *ЖЭТФ*. 1936, **6**(4), 348–350.
18. Григорьев А.И. *ЖТФ*. 2001, **71**(10), 1–7.
19. Taylor G.I. *Proc Roy Soc London*. 1964, **280A**, 383–397.
20. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белоножко Д.Ф., Климов А.В. *ЭОМ*. 2004, (4), 34–40.
21. Мазин И.П., Шметер С.М. *Облака. Строение и физика образования*. Л.: Гидрометеоздат, 1983. 280 с.
22. Майер В.В. *Кумулятивный эффект в простых опытах*. М.: Наука, 1986. 192 с.
23. Майер В.В. *Кумулятивный эффект: учебные исследования*. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 208 с.
24. Александров А.Ф., Бычков В.Л. и др. *ЖТФ*. 2006, **76**(3), 38–43.
25. *Облака и облачная атмосфера*. Справочник. Под ред. И.П. Мазина, А.Х. Хргиана, И.М. Имянитова. Л.: Гидрометеоздат, 1989. 647 с.

*Поступила 03.10.16*

*После доработки 28.11.16*

#### Summary

An expression is derived for the connection of frequency of ring capillary-and-gravitational waves on a surface of the conducting liquid in an external uniform electrostatic field, with physical parameters and an analog of a wave number. It is shown that the proposed expression has formally the same appearance as the dispersing equation for plane waves, but, in the case under consideration, the wave number as the characteristic of ring waves has no sense because of uncertainty of a concept of wavelength. A possibility of realization of an electric discharge from the surface of the liquid charged in an external electrostatic field, when drops of the same liquid falling on it, is considered.

*Keywords: ring waves, wavelength, outside uniform electrostatic field, electric discharge.*