

# Нелинейные деформации и нелинейные волны на заряженных и поляризующихся плоских свободных поверхностях

А. И. Жакин

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Юго-Западный государственный университет», ул. 50 лет Октября, 94, г. Курск, 305040, Россия, e-mail: [zhakin@mail.ru](mailto:zhakin@mail.ru)

Изложены методика расчета и основные результаты теоретических и экспериментальных исследований воздействия электрического поля на диэлектрические жидкости со свободными поверхностями в слабо нелинейном приближении. Показано, что на свободной поверхности могут образовываться как локализованные, так и периодические нелинейные деформации и волны. Изучено поведение свободных поверхностей при изменении напряженности электрического поля.

*Ключевые слова:* жидкий диэлектрик, поляризация, проводимость, нелинейные волны, солитон.

УДК 537.58

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение поведения плоских поверхностей струй во внешних электрических полях вызывает интерес как с теоретической, так и с практической точек зрения. Отметим свежие обзоры [1, 2], а также многочисленные публикации по прикладным вопросам (см. [3, 4]).

Поведение диэлектрической жидкости (ДЖ) в электрических полях определяется слабой проводимостью, а также величиной и ориентацией напряженности электрического поля. Так, свободные электрические заряды скапливаются в областях с резкой неоднородностью, например на кончиках конусов Тейлора, что приводит к их неустойчивости с последующим диспергированием жидкости. Существует довольно большое количество экспериментальных наблюдений, в которых неустойчивости развиваются в длинноволновом спектре. Причем многие из них имеют важные приложения. Это касается многослойных жидкостей, одна из свободных поверхностей которых заряжена. Например, исследование эффекта «мертвой воды» [5], осложненного дополнительным воздействием высоковольтного электрического поля [6], или процессы неустойчивости в электростатических инжекторах жидкостей по формированию нанотрубок или многослойных капсул [3, 4]. Целью данной работы является изложение методики длинноволнового слабо нелинейного анализа, предложенной в его [7, 8], и иллюстрация преимуществ этого метода в решении довольно широкого класса задач, что позволяет говорить о универсальности.

## 2. ФОРМУЛИРОВКА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Рассматриваются две несмешивающиеся нежимаемые жидкости (одна из которых может

быть газом), разделенные свободной поверхностью (рис. 1). Общая формулировка основной системы уравнений и граничных условий должна учитывать вязкость и проводимость жидкостей, а также физико-химические свойства поверхности раздела. Однако в длинноволновом приближении эффектами вязкости можно пренебречь, поэтому далее будем использовать модель идеальной жидкости.

Вычисления проводим для двух невязких идеальных жидких диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon_i$  и при потенциальном течении  $\vec{v}_i = \nabla\psi_i$  ( $i=1,2$ ).

Сформулируем краевую задачу для горизонтальной поверхности в поле сил тяжести (рис. 1) в безразмерных переменных. Введем априори амплитуду отклонения поверхности  $a$  и характерный горизонтальный масштаб  $\lambda$ , совпадающий по порядку с длиной волны возмущений. Аналитические выражения для этих параметров определяются после вывода соответствующих уравнений. Уравнение свободной поверхности запишем в виде  $z = f(t, x, y)$ , коэффициент поверхностного натяжения и напряжение на электродах обозначим как  $\alpha$ ,  $U$  соответственно. Переходя к безразмерным переменным

$$\begin{aligned} x' &= x/\lambda, \quad y' = y/\lambda, \quad z' = z/h_2, \\ t' &= t/t_0, \quad t_0 = \lambda/c_0, \\ f' &= f/a, \quad \Phi' = \Phi/U, \\ \Psi' &= \Psi/\Psi_0, \quad \Psi_0 = \lambda c_0, \quad c_0 = \sqrt{gh_2}, \end{aligned} \quad (1)$$

получим следующую систему уравнений относительно безразмерных функций (штрихи опускаем):

$$(\Omega_i): \hat{L}\Phi_i = \hat{L}\Psi_i = 0, \quad \hat{L} = \partial^2/\partial z'^2 + \mu^2\Delta_i \quad (i=1,2); \quad (2)$$

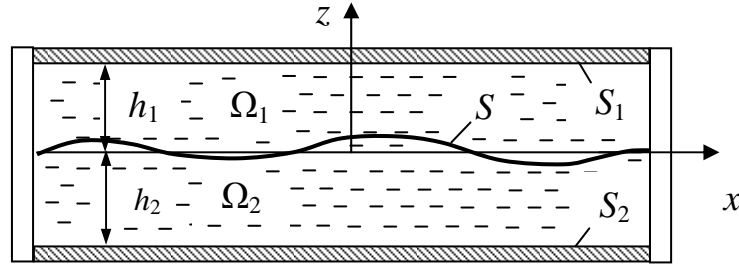


Рис. 1. Геометрия задачи:  $S$  – свободная поверхность раздела двух жидкостей;  $S_1, S_2$  – электроды.

$$z = h: \Phi_1 = 0, \psi_{1z} = 0; \quad z = -1: \quad \psi_{2z} = 0, \Phi_2 = 1; \quad (3)$$

$$z = \varepsilon f: \langle \Phi \rangle = 0, \langle \varepsilon E_n \rangle = 0, \quad (4)$$

$$\varepsilon f_t = \frac{1}{\mu^2} \psi_{1z} - \varepsilon \nabla_1 \psi_1 \cdot \nabla_1 f = \frac{1}{\mu^2} \psi_{2z} - \varepsilon \nabla_1 \psi_2 \cdot \nabla_1 f, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \langle \rho \psi_t \rangle + \frac{1}{2\mu^2} \langle \rho |\nabla \psi|^2 \rangle + \varepsilon \langle \rho \rangle f + \\ & + \frac{W_1}{2} (\langle \varepsilon E_n^2 \rangle - \langle \varepsilon E_\tau^2 \rangle) + \varepsilon \mu^2 \gamma H = C(t), \end{aligned} \quad (6)$$

$$H = \operatorname{div}_1 \left( \frac{\nabla_1 f}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \mu^2 |\nabla_1 f|^2}} \right).$$

Здесь нижние буквенные индексы обозначают соответствующие частные производные;  $C(t)$  – постоянная Лагранжа; здесь и далее  $\Delta_1, \nabla_1, \operatorname{div}_1$  – операторы Лапласа, градиент и дивергенции по переменным  $x, y$ ; угловые скобки обозначают скачок соответствующих функций на  $S$ , а именно:

$$\begin{aligned} \langle \rho \psi_t \rangle &= \rho \psi_{1t} - \rho \psi_{2t}, \\ \langle \rho |\nabla \psi|^2 \rangle &= \rho (\psi_{1z}^2 + \mu^2 |\nabla_1 \psi_1|^2) - \psi_{2z}^2 - \mu^2 |\nabla_1 \psi_2|^2, \\ \langle \rho \rangle &= \rho - 1, \\ \langle \varepsilon \rangle &= \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \quad \langle \Phi \rangle = \Phi_1 - \Phi_2, \\ \langle \varepsilon E_n \rangle &= \varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n}, \quad \langle \varepsilon E_\tau^2 \rangle = \varepsilon_1 E_{1\tau}^2 - \varepsilon_2 E_{2\tau}^2. \end{aligned}$$

Нормальная  $E_n$  и квадрат тангенциальной  $E_\tau^2$  компонент напряженностей электрического поля выражаются как:

$$\begin{aligned} E_n &= -\frac{\Phi_z - \varepsilon \mu^2 \nabla_1 f \cdot \nabla_1 \Phi}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \mu^2 |\nabla_1 f|^2}}, \\ E_\tau^2 &= E_{\tau x}^2 + E_{\tau y}^2 + 2E_{\tau x} E_{\tau y} (\tau_x \cdot \tau_y). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $E_{\tau x} = -\nabla \Phi \cdot \tau_x, E_{\tau y} = -\nabla \Phi \cdot \tau_y; \tau_x, \tau_y$  – единичные касательные к  $S$  векторы вдоль осей  $x, y$ , так что

$$\begin{aligned} \nabla \Phi &= \mu \frac{\partial \Phi}{\partial x} \vec{e}_x + \mu \frac{\partial \Phi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{e}_z, \\ \tau_x &= \frac{\vec{e}_x + \varepsilon \mu f_x \vec{e}_z}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \mu^2 f_x^2}}, \end{aligned}$$

$$\tau_y = \frac{\vec{e}_y + \varepsilon \mu f_y \vec{e}_z}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \mu^2 f_y^2}},$$

где  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  – орты декартовой системы координат.

Безразмерные параметры выражаются как:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{a}{h_2}, \quad \mu = \frac{h_2}{\lambda}, \\ h &= \frac{h_1}{h_2}, \quad \rho = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad W_1 = \frac{\varepsilon_0 U^2}{\rho_2 g h_2^3}, \quad \gamma = \frac{a}{\rho_2 g h_2^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Сделаем несколько замечаний к сформулированной краевой задаче (2)–(8).

1) С точностью до обозначений она совпадает с задачами о поведении намагничивающихся по линейному закону магнитных жидкостей в магнитных полях. Для этого необходимо сделать замены  $\mu_i \rightarrow \varepsilon_i$  ( $i = 1, 2$ ),  $\vec{H} \rightarrow \vec{E}$ , и электроды считать ферромагнетиками.

2) Формальным переходом  $\varepsilon_2 \rightarrow \infty$  (или  $\varepsilon_1 \rightarrow \infty$ ) из граничного условия  $\langle \varepsilon E_n \rangle = 0$  следует  $\vec{E}_2 = 0$  (или  $\vec{E}_1 = 0$ ). Этот соответствует случаю, когда в одной из жидкостей происходит быстрая релаксация зарядов по сравнению с периодом колебаний свободной поверхности. Это приближение обычно называется приближением идеального проводника [2].

3) Условие  $\varepsilon \ll 1$  означает малость амплитуд отклонения свободной поверхности от равновесного состояния, а условие  $\mu \ll 1$  выражает длинноволновость возмущений. Нелинейный анализ обычно проводится в условиях слабой нелинейности  $\varepsilon \sim \mu^2$ , когда при сохранении членов порядка  $\varepsilon \sim \mu^2$  сохраняются квадратичные члены (слабая нелинейность).

4) Краевые задачи имеют одинаковые математические структуры, позволяющие применить нижеизложенную универсальную методику (см. раздел 3).

### 3. МЕТОДИКА НЕЛИНЕЙНОГО АНАЛИЗА

Кратко изложим принципиальные особенности данной методики [7, 8] на примере задачи (2)–(8). Вывод основных уравнений произво-

дится методом асимптотического анализа в два этапа.

*Первый этап.* Решение разыскиваем в виде рядов по  $\varepsilon$ :

$$\Psi_i = \sum_{j=1}^{j=\infty} \varepsilon^j \Psi_{ij}, \quad \Phi_i = \sum_{j=0}^{j=\infty} \varepsilon^j \Phi_{ij}, \quad (i = 1, 2), \quad (9)$$

где функции  $\Psi_{ij}$ ,  $\Phi_{ij}$  зависят не только от времени и координат, но и от параметров  $\varepsilon$ ,  $\mu$  обычно входящих множителями переменных  $t$ ,  $x$ ,  $y$ . Такой прием типичен при анализе нелинейных уравнений, содержащих малые параметры [9]. Например, введение медленного времени  $\tau = \varepsilon t$  позволяет исключать секулярные члены в асимптотическом разложении, что пролонгирует решение по временной шкале до  $t \sim \varepsilon^{-1}$ . Подставляя эти разложения в (2)–(6), после линеаризации по  $\varepsilon$  получаем последовательность краевых задач относительно  $\Psi_{ij}$ ,  $\Phi_{ij}$ . Далее, вводя неизвестную функцию  $\Psi = \Psi_{21}$  – потенциал скорости на невозмущенной поверхности раздела и используя уравнения (2), граничные условия (3), (4) и условие непрерывности скорости в (5), после решения задач первого и второго приближений по  $\varepsilon$  получим:

$$\Psi_{ij} = \hat{G}_{ij}[\vec{r}, f, \Psi], \quad \Phi_{ij} = \hat{H}_{ij}[\vec{r}, f], \quad (10)$$

где  $\hat{G}_{ij}[\vec{r}, f, \Psi]$ ,  $\hat{H}_{ij}[\vec{r}, f]$  – интегральные операторы, действующие на функции  $f$ ,  $\Psi$ .

Подставляя (10) в оставшиеся граничные условия (5), (6), получаем с точностью до  $\varepsilon^2$  искомую систему нелинейных интегродифференциальных уравнений в виде:

$$f_t = \hat{F}[f, \Psi], \quad \Psi_t = \hat{L}[f, \Psi], \quad (11)$$

где  $\hat{F}[f, \Psi]$ ,  $\hat{L}[f, \Psi]$  – интегродифференциальные операторы.

Система уравнений (11) довольно сложная. Например, заряженная поверхность в приближении глубокой воды описывается нелинейными уравнениями с сингулярными интегральными операторами [7]. Упрощение системы (11) можно провести, используя приближение мелкой воды, когда выполняется условие:

$$\varepsilon \sim \mu^2 \ll 1. \quad (12)$$

*Второй этап (приближение мелкой воды).* При выполнении (12) интегродифференциальные операторы в (11) можно преобразовать в дифференциальные, используя формулу

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^A k^n f^*(k) e^{-ikx} dk = (-i)^n \frac{\partial^n f}{\partial x^n}, \quad i = \sqrt{-1}, \quad (13)$$

где  $n$  – целое число,  $f^*$  – Фурье-преобразование функции  $f = f(x)$ ; константа  $A$  определяется так:

если функция  $f(x)$  локализована, то  $A = \infty$ , если периодическая, то  $A$  определяется периодом.

В двухмерном случае  $f = f(\vec{r}_1)$ ,  $\vec{r}_1 = (x, y)$  имеет место аналогичная формула:

$$\frac{1}{2\pi} \iint k^{2n} f^*(k) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_1} dk_x dk_y = (-1)^n \Delta_1^n f. \quad (14)$$

Здесь и в дальнейшем не указываются пределы интегрирования,  $\vec{k} \cdot \vec{r}_1 = k_x x + k_y y$ ,  $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ ,  $\Delta_1 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$  – оператор Лапласа.

Структуру нелинейных уравнений (11) в длинноволновом приближении можно определить из общих положений следующим образом. Если линеаризовать уравнения (11) по параметру  $\varepsilon$  и разыскивать решение в виде нормальных мод

$$f = f_0 e^{i\varphi}, \quad \Psi = \Psi_0 e^{i\varphi}, \quad \varphi = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}_1, \quad (15)$$

то получим однородную систему двух линейных уравнений относительно постоянных амплитуд  $f_0$ ,  $\Psi_0$ . Приравнявая детерминант этой системы нулю, получаем дисперсионное уравнение в виде:

$$\omega^2 = F(\mu k, W). \quad (16)$$

Здесь  $W$  – параметр неустойчивости. Из структуры уравнений (2) ясно, что параметр  $\mu$  является множителем волнового числа  $k$ . При малых  $\mu$  функцию  $F(\mu k, W)$  можно разложить в ряд, при этом возникают два случая, когда разложение содержит нечетные степени волнового числа  $k$  и четные степени. В последнем случае разложение обычно имеет вид:

$$F(\mu k, W) = k^2 (\zeta_0 (W_* - W) + \mu^2 \zeta_2 k^2) + O(\varepsilon, \mu^4), \quad (17)$$

где  $O(\varepsilon, \mu^4)$  члены порядка  $\varepsilon$ ,  $\mu^4$ ;  $W_*$  – критическое значение параметра неустойчивости по отношению к длинноволновым возмущениям;  $\zeta_0$ ,  $\zeta_2$  – константы разложения, причем  $\zeta_0 > 0$ .

При подстановке (17) в (16) для функции  $f$  в (15) получим уравнение:

$$f_{tt} = \Delta_1 (\zeta_0 (W_* - W) f - \mu^2 \zeta_2 \Delta_1 f) + \hat{D}[\varepsilon, \mu^4, f], \quad (18)$$

где  $\hat{D}[\varepsilon, \mu^4, f]$  – нелинейный оператор, включающий члены порядка  $\varepsilon$ ,  $\mu^4$ .

Из (13) следует, что наличие нечетных степеней волновых чисел  $k$  в разложении (17) приводит к нелинейному дифференциальному уравнению с комплексными коэффициентами, которое можно свести к интегродифференциальному уравнению.

Таким образом, одной из основных задач приближенного нелинейного анализа со слабой (квадратичной) нелинейностью является вычисление интегродифференциальных операторов

$\widehat{F}[f, \Psi]$ ,  $\widehat{L}[f, \Psi]$  или дифференциального оператора  $\widehat{D}[\varepsilon, \mu^4, f]$ , что значительно упрощает анализ нелинейных процессов на заряженных или поляризующихся поверхностях раздела двух жидкостей. Ниже рассматривается применение вышеуказанной методики к исследованию слабо нелинейных явлений на горизонтальных свободных поверхностях во внешних электрических полях.

#### 4. ИССЛЕДОВАНИЕ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Горизонтально расположенная поверхность интересна, прежде всего, простотой теоретических и экспериментальных исследований. На этом примере можно выяснить основные закономерности длинноволновых нелинейных эффектов, подчас совершенно неожиданных. Например, в работах [7, 8] показано, что при достаточно близком расположении верхнего электрода к свободной заряженной поверхности  $h_1 \leq h_*$  (для плоской поверхности  $h_* = \sqrt{3} l_c$ ,  $l_c = \sqrt{\alpha/(\rho_2 g)}$  – капиллярная длина) неустойчивость развивается по отношению к длинноволновым возмущениям, а устойчивые локализованные образования имеют форму лунок, а не ожидаемых бугорков, согласно направлению кулоновской поверхностной силы. Ниже рассматриваются задачи о нелинейных эффектах в двухслойных и трехслойных несмешивающихся жидкостях, разделенных соответственно одной и двумя свободными поверхностями. В первом случае жидкости являются идеальными диэлектриками, во втором – проявляется быстрая релаксация зарядов (модель идеальных проводников). Следует отметить, что в силу громоздкости вычислений необходим контроль, который будет осуществлен путем предельного перехода  $\varepsilon_2 \rightarrow \infty$ , чтобы получить известные результаты [7, 8].

##### 4.1. Вывод системы нелинейных уравнений поляризующихся жидкостей

Задача (2)–(8) решается по методике, изложенной в разделе 3. В нулевом приближении для  $\Phi_{i0}$  имеем:

$$\begin{aligned} \Phi_{10} &= -A_1(z-h), \quad \Phi_{20} = 1 - A_2(z+1), \\ A_1 &= \varepsilon_2/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 h), \quad A_2 = \varepsilon_1/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 h). \end{aligned} \quad (19)$$

Для первых двух приближений получаем следующие задачи, определяющие операторы  $\widehat{G}_{ij}[\vec{r}, f, \Psi]$ ,  $\widehat{H}_{ij}[\vec{r}, f]$ :

$$(\Omega_i): \widehat{L}\Phi_{ij} = \widehat{L}\Psi_{ij} = 0; \quad (20)$$

$$\begin{aligned} z = h: \quad \Psi_{1jz} &= 0, \quad \Phi_{1j} = 0; \\ z = -1: \quad \Phi_{2j} &= 0, \quad \Psi_{2iz} = 0; \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} z = 0: \quad \Phi_{11} - \Phi_{21} &= Af, \\ A &= A_1 - A_2, \quad \varepsilon_1 \Phi_{11z} = \varepsilon_2 \Phi_{21z}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{12} - \Phi_{22} &= (\Phi_{11z} - \Phi_{21z})f, \\ \varepsilon_1 \Phi_{12z} - \varepsilon_2 \Phi_{22z} &= (\varepsilon_2 \Phi_{21zz} - \varepsilon_1 \Phi_{11zz})f, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\Psi_{11z} = \Psi_{21z},$$

$$\Psi_{12z} = H,$$

$$\begin{aligned} H &= \Psi_{22z} + (\Psi_{21zz} - \Psi_{11zz})f + \\ &+ \mu^2 \nabla_1 f \cdot \nabla_1 (\Psi_{11} - \Psi_{21}), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\Psi_{21} = \Psi, \quad \Psi_{21} = -\Psi_{1z}f. \quad (25)$$

Здесь (24) является условием непрерывности скорости на свободной поверхности в первом и втором приближениях соответственно, граничное условие  $\Psi_{21} = \Psi$  в (25) вводит функцию  $\Psi(t, x, y)$ , подлежащую определению,  $i, j = 1, 2$ .

Явный вид операторов  $\widehat{G}_{ij}[\vec{r}, f, \Psi]$ ,  $\widehat{H}_{ij}[\vec{r}, f]$  определяется следующим образом. Решения для потенциалов электрического поля находим в виде преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} \Phi_{i1} &= \frac{1}{2\pi} \iint F_i^* G_i(\kappa, z) e^{-i\vec{\kappa} \cdot \vec{r}_i} d\kappa_x d\kappa_y, \\ \Phi_{i2} &= \frac{f}{2\pi} \iint F_{i2}^* G_i(\kappa, z) e^{-i\vec{\kappa} \cdot \vec{r}_i} d\kappa_x d\kappa_y. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь  $i = 1, 2$ ; функции, отмеченные звездочкой  $F_{i1}^*, F_{i2}^*$ , зависят только от времени и волнового числа. Подставляя (26) в уравнения (20) и используя граничные условия (21)–(25), получаем:

$$\begin{aligned} G_1(\kappa, z) &= \frac{\text{sh}[\mu\kappa(h-z)]}{\text{sh}(\mu\kappa h)}, \\ G_2(\kappa, z) &= \frac{\text{sh}[\mu\kappa(z+1)]}{\text{sh}(\mu\kappa h)}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$F_i^* = \frac{\varepsilon_i \text{Acth}(\mu\kappa h)}{F} f^* \quad (i = 1, 2),$$

$$f^* = \frac{1}{2\pi} \iint f e^{i\vec{\kappa} \cdot \vec{r}_i} dx dy,$$

$$F_{12}^* = (H_2 + \varepsilon_2 \text{cth}(\mu\kappa) H_1) / F,$$

$$F_{22}^* = (\varepsilon_1 \text{cth}(\mu\kappa h) H_1 - H_2) / F,$$

$$H_1 = \mu\kappa (\text{cth}(\mu\kappa h) F_1^* - \text{cth}(\mu\kappa) F_2^*),$$

$$H_2 = \mu\kappa (\varepsilon_1 F_1^* + \varepsilon_2 F_2^*),$$

$$F = \varepsilon_1 \text{cth}(\mu\kappa h) + \varepsilon_2 \text{cth}(\mu\kappa).$$

Здесь  $f^*$  – Фурье-преобразование по переменным  $x, y$  функции  $f(t, x, y)$ .

Соотношения (26), (27) однозначно определяют интегральные операторы  $\hat{H}_{ij}[\bar{r}, f]$ . Аналогичным образом находим выражения для потенциалов скоростей, определяющие операторы  $\hat{G}_{ij}[\bar{r}, f, \Psi]$ :

$$\Psi_{ij} = \frac{1}{2\pi} \iint F_{ij}^* D_i(\kappa, z) e^{-i\bar{\kappa} \cdot \bar{r}} d\kappa_x d\kappa_y \quad (i, j = 1, 2), \quad (28)$$

$$D_1(\kappa, z) = \frac{\text{ch}[\mu\kappa(z-h)]}{\text{ch}(\mu\kappa h)}, \quad D_2(\kappa, z) = \frac{\text{ch}[\mu\kappa(z+1)]}{\text{ch}(\mu\kappa)},$$

$$\Psi^* = \frac{1}{2\pi} \iint \Psi e^{i\bar{\kappa} \cdot \bar{r}} dx dy,$$

$$F_{21}^* = \Psi^*, \quad F_{22}^* = -(\Psi_{21z} f)^*,$$

$$F_{11}^* = -\Psi^* \text{cth}(\mu\kappa h) \text{th}(\mu\kappa),$$

$$F_{12}^* = -H^* \text{cth}(\mu\kappa h) / (\mu\kappa).$$

Здесь функции  $F_{ij}^*$  зависят только от времени и волнового числа, так как  $\Psi_{21z}$  и функция  $H$  в (24) берутся при  $z = 0$ . Разлагая по степеням  $\varepsilon$  граничные условия (5), (6), с учетом (26), (27) получаем систему двух интегродифференциальных уравнений относительно функций  $f(t, x, y)$ ,  $\Psi(t, x, y)$ , которая с точностью  $O(\varepsilon^2)$  имеет вид:

$$f_t = \mu^{-2} [\Psi_{21z} + \varepsilon (\Psi_{21zz} f + \Psi_{22z})] - \varepsilon \nabla_1 f \cdot \nabla_1 \Psi_{21}; \quad (29)$$

$$\langle \Psi \rangle_t + \frac{1}{2} \varepsilon \langle |\nabla f|^2 \rangle + (1-\rho) f - \frac{1}{2} W_1 h^2 [\langle E_n^2 \rangle - \varepsilon \mu^2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) E_{1r}^2] - \mu^2 \gamma \Delta_1 f = C_1; \quad (30)$$

$$\langle \Psi \rangle_t = [\Psi_{21} + \varepsilon (\Psi_{21z} f + \Psi_{22})]_t - \rho [\Psi_{11} + \varepsilon (\Psi_{11z} f + \Psi_{12})]_t,$$

$$\langle |\nabla f|^2 \rangle = \mu^{-2} \Psi_{21z}^2 + |\nabla_1 \Psi_{21}|^2 - \rho (\mu^{-2} \Psi_{11z}^2 + |\nabla_1 \Psi_{11}|^2),$$

$$\langle E_n^2 \rangle = 2(\varepsilon_1 \Phi_{10z} \Phi_{11z} - \varepsilon_2 \Phi_{20z} \Phi_{21z}) + \varepsilon \langle E_{1n}^2 \rangle,$$

$$\langle E_{1n}^2 \rangle = \varepsilon_1 (\Phi_{11z}^2 + 2\Phi_{10z} (\Phi_{11zz} f + \Phi_{12z})) - \varepsilon_2 (\Phi_{21z}^2 + 2\Phi_{20z} (\Phi_{21zz} f + \Phi_{22z})),$$

$$E_{1r}^2 = (\Phi_{11x} + \Phi_{10z} f_x)^2 + (\Phi_{11y} + \Phi_{10z} f_y)^2.$$

Формулы (29), (30) совместно с (26), (27) представляют систему нелинейных интегродифференциальных уравнений относительно функций  $f, \Psi$ . В зависимости от значений параметров  $h$  и  $\mu$  эта система примечательна в нескольких отношениях. Укажем два интересных случая: при  $h \rightarrow \infty, \mu \ll 1$  получаем верхнюю

жидкость в приближении глубокой воды, а нижнюю – в приближении мелкой воды. При конечном  $h$  и  $\mu \ll 1$  получаем приближение мелкой воды для обоих слоев. Очевидно, в первом случае уравнения (29), (30) являются интегродифференциальными, а во втором – дифференциальными.

Переход ко второму этапу – длинноволновому приближению  $\mu \ll 1$  – заключается в разложении функций в (26), (27) по малому параметру  $\mu$  и использовании формул (13), (14). Полагая  $\varepsilon \sim \mu^2$ , приведем окончательный результат:

$$f_t + \Delta_1 \Psi + \varepsilon \text{div}_1 (f \nabla_1 \Psi) + (\mu^2/3) \Delta_1^2 \Psi = 0, \quad (31)$$

$$\Psi_t + c_0^2 f - \varepsilon \delta_1 \Psi_{12t} + \frac{\varepsilon}{2} (\delta_2 |\nabla_1 \Psi|^2 + \delta_3 f^2) + \mu^2 (\delta_5 \Delta_1 f - \delta_4 \Delta_1 \Psi_t) = C_1(t), \quad (32)$$

$$c_0^2 = (W_* - W) / \delta_0, \quad W_* = 1 - \rho,$$

$$W = W_1 h^2 \beta_1, \quad \delta_0 = 1 + \rho / h, \quad (33)$$

$$\delta_1 = \rho / \delta_0, \quad \delta_2 = (1 - \rho / h^2) / \delta_0,$$

$$\delta_3 = 3(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) W / [\delta_0 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 h)],$$

$$\delta_4 = \rho \beta_2 / \delta_0, \quad \delta_5 = (W \beta_3 / 3 - \gamma) / \delta_0,$$

$$\beta_1 = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 h)^3}, \quad \beta_2 = \frac{\rho(1+h^3)}{3h}, \quad \beta_3 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 h^3}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 h}.$$

Функция  $\Psi_{12}$  применяется при  $z = 0$  и определяется следующим уравнением:

$$\Delta_1 \Psi_{12} + B \text{div}_1 (f \nabla_1 \Psi) = 0, \quad B = (1+h) / h^2. \quad (34)$$

Предельным переходом  $\varepsilon_2 \rightarrow \infty$  можно убедиться, что (32) переходит в соответствующее уравнение, когда нижняя жидкость является идеальным проводником [2, 7], что подтверждает корректность выкладок. Таким образом, нелинейные члены в (29)–(34) определяют нелинейные операторы  $\hat{F}[f, \Psi]$ ,  $\hat{L}[f, \Psi]$ , причем при конечном  $\mu$  эти операторы являются интегродифференциальными, а при  $\mu \ll 1$  – дифференциальными.

Как было указано выше, длинноволновое приближение выполняется при малых толщинах слоев  $h_1, h_2$ . Для вычисления условия применения длинноволнового приближения рассмотрим дисперсионное соотношение (16), которое в данном случае имеет вид (размерные переменные):

$$\omega^2 = \frac{\omega_0^2 \kappa^2}{H(\kappa)} \left[ 1 - \rho + \gamma \kappa^2 - \frac{W}{G(\kappa)} \right], \quad (35)$$

$$\omega_0^2 = g / [h_2 (1 + \rho / h)],$$

$$H(\kappa) = \kappa (\text{cth} \kappa + \rho \text{th}(\kappa h)) / (1 + \rho / h),$$

$$G(k) = (\varepsilon_1 \text{th} \kappa + \varepsilon_2 \text{th}(\kappa h)) / (\kappa (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 h)),$$

где  $\rho, h, \gamma, W$  определяются согласно (8), (33),  $\kappa = kh_2$ .

Из (35) видно, что частоты малых колебаний уменьшаются с ростом параметра электрического поля  $W$ , причем в закритической области  $W > W_*$  имеет место неустойчивость. Критическое значение  $W_*$  определяется согласно

$$W_* = \min_{\kappa > 0} W(\kappa), \quad W(\kappa) = (1 - \rho + \gamma\kappa^2)G(\kappa). \quad (36)$$

В коротковолновой области  $\kappa \gg 1$  функция  $W(\kappa)$  имеет линейную асимптотику  $W(\kappa) \rightarrow \xi_1 \kappa$ ,  $\xi_1 = \gamma(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) / (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 h)$ , а в длинноволновой  $\kappa \ll 1$  выражается как  $W(\kappa) = 1 - \rho + \xi_2 \kappa^2$ ,  $\xi_2 = \gamma - \frac{(1-\rho)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 h^3)}{3(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 h)}$ . Отсюда видно, что функ-

ция  $W(\kappa)$  будет положительна и монотонно возрастать при  $\rho < 1$ ,  $\xi_2 > 0$ , или

$$\rho_2 > \rho_1, \quad \frac{g(\rho_2 - \rho_1)(\varepsilon_1 h_2^3 + \varepsilon_2 h_1^3)}{3\alpha(\varepsilon_1 h_2 + \varepsilon_2 h_1)} < 1, \quad (37)$$

причем  $W_* = 1 - \rho$ .

Очевидно, второе условие в (37) будет всегда выполняться для достаточно тонких слоев (малых  $h_1, h_2$ ). В случае заряженной поверхности, когда  $\varepsilon_2 \rightarrow \infty$ , из (37) следует известный результат [2, 7]  $h_1 < \sqrt{3\alpha/(\rho_2 - \rho_1)g}$ .

В длинноволновой области  $\kappa \ll 1$  дисперсионное соотношение (35) записывается в виде (16), (17), а именно:

$$\omega^2 = \omega_0^2 \kappa^2 (c_0^2 - \kappa^2 \zeta), \quad \zeta = \delta_5 + c_0^2 (1 + \rho h) / (3\delta_0^2), \quad (38)$$

где  $c_0^2, \delta_0, \delta_5$  определяются в (33).

Из (38) видно, что малые отклонения свободной поверхности описываются уравнением вида (18), и дальнейший анализ связан с вычислением нелинейных членов в этом уравнении.

#### 4.2. Нелинейные волны в докритической области

Система уравнений (31)–(34) определяет эволюцию нелинейных возмущений в длинноволновом приближении и, в свою очередь, может быть упрощена в двух предельных случаях. В докритической области  $W < W_*$  при  $W_* - W \gg \varepsilon$  эта система может быть преобразована по методике [9] в уравнение типа Кортевега-де Вриза (КдВ). Приведем кратко вывод этого уравнения, попутно исправляя неточности в [9].

Задача решается в плоской постановке. Введем скорость течения на невозмущенной поверхности раздела  $V = \Psi_x$ . В данном случае с точностью до членов порядка  $\varepsilon$  имеем  $\Psi_{12,xt} = -B(fV)_t = B(VV_x + c_0^2 ff_x)$ ,  $V_{xxt} = -c_0^2 f_{xxx}$ , поэтому систему уравнений (31), (32) можно записать как:

$$\bar{u}_t + A\bar{u}_x + \eta D\bar{u}_{xxx} = 0, \quad (39)$$

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} f \\ V \end{bmatrix}, \quad A = A_0 + \varepsilon A_1, \quad A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c_0^2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} V & f \\ \delta_{31}f & \delta_{21}V \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ \delta_{54} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\delta_{21} = \delta_2 - B\delta_1, \quad \delta_{31} = \delta_3 - c_0^2 B\delta_1,$$

$$\delta_{54} = \delta_5 + c_0^2 \delta_4, \quad \eta = \mu^2.$$

Решение уравнения (39) вычислим в виде асимптотических рядов:

$$\bar{u} = \bar{u}_0 + \varepsilon \bar{u}_1 + \varepsilon^2 \bar{u}_2 + \dots + \eta \bar{w}_1 + \eta^2 \bar{w}_2 + \dots \quad (40)$$

Для нулевого приближения имеем  $\bar{u}_{0t} + A_0 \bar{u}_{0x} = 0$ .

Отсюда получаем  $\bar{u}_0 = U(\xi)\bar{r}$ , где  $U(\xi)$  – произвольная функция параметра  $\xi = x - \lambda t$ ;  $\lambda$  – собственное число,  $\bar{r}$  – собственный вектор матрицы  $A_0$ :  $A_0 \bar{r} = \lambda \bar{r}$ , причем  $\lambda = c_0$ , а транспонированный вектор-строка выражается как  $\bar{r}' = (1, c_0)$ .

Обычный асимптотический анализ приводит к последовательности линейных неоднородных уравнений, определяющих последующие члены в (40). При этом появляются секулярные члены, пропорциональные произведению  $\varepsilon t$ . Поэтому условия применимости (40) запишутся как  $\varepsilon t \ll 1$ . Суть нелинейного анализа заключается в том, чтобы найти такую функцию  $\bar{u}$ , которая бы удовлетворяла уравнению (40) с точностью вплоть до членов порядка  $\varepsilon, \eta$  на промежутках времени  $\varepsilon t \sim 1$ . Этого можно добиться, используя метод многих временных масштабов [9]. Именно вводим медленные времена  $\tau_1 = \varepsilon t$ ,  $\tau_2 = \eta t$  и считаем, что  $U = U(\xi, \tau_1, \tau_2)$ . Тогда уравнение для  $U(\xi, \tau_1, \tau_2)$  запишется в виде:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -c_0 \frac{\partial U}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial U}{\partial \tau_1} + \eta \frac{\partial U}{\partial \tau_2}. \quad (41)$$

Здесь учтено  $U_\xi = U_x$ . Таким образом, задача свелась к вычислению производных по  $\tau_1, \tau_2$  через производные по  $x$ . Для этого запишем уравнения для первого приближения:

$$(A_0 - \lambda I)\bar{u}_{1\xi} = -(\bar{u}_{0\tau_1} + A_1 \bar{u}_{0x}),$$

$$(A_0 - \lambda I)\bar{w}_{1\xi} = -(\bar{u}_{0\tau_2} + D\bar{u}_{0xxx}). \quad (42)$$

Чтобы исчезли секулярные члены в первом приближении, необходимо обратить в ноль правые части уравнений (42), то есть сделать их линейно зависимыми. Для этого достаточно умножить (42) скалярно на вектор-строку  $\bar{r}' = (1, c_0)$  и приравнять правую часть нулю, что с учетом  $\bar{u}_0 = U\bar{r}$  дает:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau_1} = -U_x \frac{A_{10} \vec{r} \cdot \vec{r}'}{\vec{r} \cdot \vec{r}'}, \quad \frac{\partial U}{\partial \tau_2} = -U_{xxx} \frac{D\vec{r} \cdot \vec{r}'}{\vec{r} \cdot \vec{r}'},$$

$$A_{10} = \begin{bmatrix} c_0 & 1 \\ \delta_{31} & \delta_{21} c_0 \end{bmatrix}. \quad (43)$$

Подставляя эти выражения в (41), получаем уравнение типа КдВ:

$$U_t + c_0 U_x + \varepsilon \xi_1 U U_x + \mu^2 \xi_2 U_{xxx} = 0, \quad (44)$$

$$\xi_1 = c_0 (2 + \delta_{31} + c_0 \delta_{21}) / (1 + c_0^2),$$

$$\xi_2 = c_0 (1/3 + \delta_{54}) / (1 + c_0^2),$$

причем функции  $f$ ,  $V$  выражаются как  $f = U$ ,  $V = c_0 U$ .

Сделаем несколько замечаний к уравнению (44). Прежде всего отметим, что при его выводе использовалось представление бегущих волн, поэтому оно используется для нахождения решений в виде уединенных бегущих волн. Если искать решения в виде  $U = U(t, x)$ , то заменой  $U = U(t, \xi)$ ,  $\xi = x - c_0 t$  член  $c_0 U_x$  можно исключить, и тогда (44) примет стандартный вид.

Влияние поля на нелинейные возмущения легко проследить, выписав решение в виде уединенной волны:  $U = U_0 ch^{-2} \xi$ ,  $\xi = x - ct$ . Подставляя это выражение в (44), для амплитуды и скорости получим:

$$U_0 = 12\mu^2 \xi_2 / (\varepsilon \xi_1), \quad c = c_0 (1 + 4\mu^2 \xi_2). \quad (45)$$

Так как  $c \sim c_0$ , то с ростом поля скорость волны уменьшается, тогда как амплитуда слабо зависит от поля. Таким образом, в докритической области внешнее электрическое поле подавляет нелинейные колебания поверхности.

#### 4.3. Нелинейные волны и деформации в критической области

В критической области  $W^* - W \sim \varepsilon$  поведение поверхности кардинально изменяется. Во-первых, появляются статические деформации типа канавок и уединенных лунок, которые описываются уравнением (размерные переменные):

$$\Delta_1 f = a_1 f + a_2 f^2 + C_0, \quad (46)$$

$$a_1 = \frac{3(W - W^*)}{h_1^2 (W\beta_3 - 3\gamma)}, \quad a_2 = \frac{9W(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{2h_1^3 (W\beta_3 - 3\gamma)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 h)}$$

Это уравнение заменой  $f = (|a_1|/a_2)u(\xi, \eta)$ ,

$\xi = \sqrt{|a_1|} x$ ,  $\eta = \sqrt{|a_1|} y$  приводится к виду:

$$\Delta_{\xi\eta} u = \pm u + u^2 + C, \quad (47)$$

где  $\Delta_{\xi\eta}$  – двухмерный лапласиан по переменным  $\xi$ ,  $\eta$ , а верхний знак плюс берется при  $a_1 > 1$ ,

минус – при  $a_1 < 1$ .

Уравнение (47) в одномерном случае  $\Delta_{\xi\eta} = d^2/d\xi^2$  имеет единственное решение  $u = -1,5ch^{-2}(\xi/2)$  при верхнем знаке плюс. Отсюда следует, что при  $W\beta_3 > 3\gamma$  (малое поверхностное натяжение) в закритической области  $W > W^*$  плоская деформация поверхности имеет форму канавки при  $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$  и вала при  $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ . Такая же закономерность выявлена и в осесимметричном случае [8] с тем отличием, что при  $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$  образуются лунки, а при  $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$  – бугорки. Вводя медленное время  $\tau = \zeta t$ ,  $\zeta = \sqrt{\varepsilon}$  и разыскивая решение уравнений (31), (32) в виде рядов

$$f = F(\tau, x, y) + \zeta F_1(\tau, x, y) + \dots,$$

$$\Psi = \zeta H(\tau, x, y) + \zeta^2 H_2(\tau, x, y) + \dots, \quad (48)$$

в первом приближении для функции  $F(\tau, x, y)$  получим следующее уравнение:

$$F_{\tau\tau} = \Delta_1 (\chi \Delta_1 F - \chi_1 F - \chi_2 F^2), \quad (49)$$

$$\chi = \frac{\mu^2}{\delta_0 \varepsilon} \left( \frac{1}{3} W\beta_3 - \gamma \right), \quad \chi_1 = \frac{W - W^*}{\delta_0 \varepsilon},$$

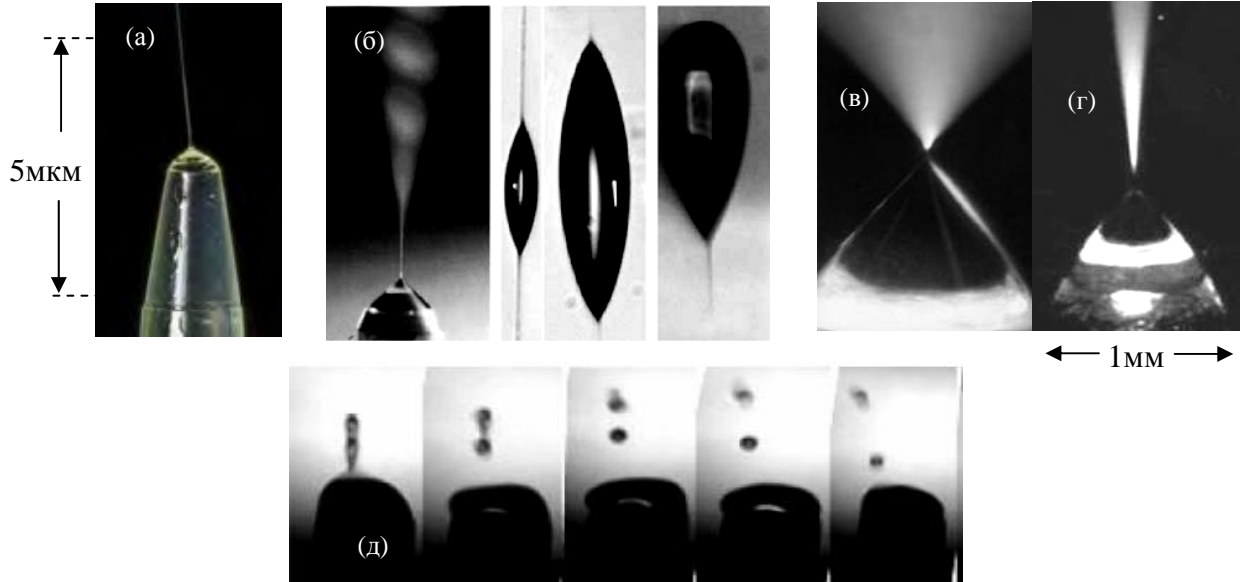
$$\chi_2 = \frac{3(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)W}{2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 h)\delta_0}.$$

В пространственном случае это уравнение имеет решения в виде пульсирующих и бегущих лунок, валов или канавок [7, 8], совпадающие с решениями уравнения (46) в стационарном случае. Например, для плоской бегущей волны вида  $F = Ach^{-2}(\xi/l_E)$ ,  $\xi = x - V\tau$  из (49) получаем  $A = -1,5(V^2 + \chi_1)/\chi_2$ ,  $l_E = 2\sqrt{\chi/(V^2 + \chi_1)}$ . Отсюда видно, что в закритической области  $W > W^*$  и  $W\beta_3 > 3\gamma$  образуются лунки, причем с ростом скорости  $V$  модуль амплитуды  $A$  увеличивается. Обратим внимание на то, что лунки ведут себя подобно частицам, испытывающим продольное сжатие с ростом скорости  $V$ .

#### 4.4. Деформации в закритической области.

##### Поляризационные конусы

Исследование распада капель воды в однородном внешнем поле [10] и последующие многочисленные исследования заряженных поверхностей [1–4, 11–18] показали, что в сильном поле формируются конусы (рис. 2). Угол конуса, согласно расчетам [10], составляет 98°. Однако эти результаты требуют существенного уточнения. Прежде всего отметим, что конусы на поверхности заряженных жидкостей не являются статическими образованиями, поэтому расчеты [10] к реальным конусам не имеют никакого

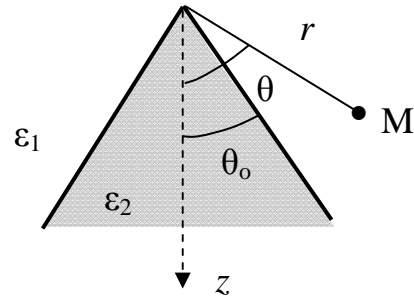


**Рис. 2.** Конус Тейлора согласно [10] (а), различные углы конусов [11] (б), электрораспыление в воздухе (в) и в вакууме (г) [12]; перезарядка микронных капель воды [13] (д).

отношения. По этой причине угол конуса существенно зависит от различных условий, в частности от давления в газе (см. [12] и рис. 2), геометрий электродных систем и электрофизических свойств жидкости, что приводит к довольно сложным процессам. Например, образование конусов на менисках сопровождается формированием микроконусов на остриях, которые пульсируют с частотами 100–500 Гц, возрастающих по мере увеличения напряженности поля [4, 13, 14].

При достаточно больших полях с микроконусов отрываются заряженные капли микронного размера, причем некоторые микрокапли возвращаются обратно на мениск, то есть перезаряжаются [4, 13]. Эти наблюдения показывают, что вблизи кончиков заряженных конусов в воздухе существует биполярное распределение зарядов. Кроме того, имеется движение жидкости внутри конусов [15–18], которые наблюдались в экспериментах с глицериновыми менисками [13]. Эти усложняющие обстоятельства обусловлены динамикой поверхностных зарядов, а также ионизационными процессами как на поверхности жидкости, так и в газе. Поэтому статические конусы могут образовываться только при поляризующихся или магнитных жидкостях, а в случае заряженных жидкостей – только при отсутствии ионизационных процессов, например на поверхности жидкого металла, контактирующего с глубоким вакуумом.

В случае поляризующихся жидкостей методика расчета угла конуса заключается в следующем. Уравнение поверхности конуса записывается в виде  $r(z) = z/\cos\theta_0$ , где  $r$ ,  $\theta$  – координаты сферической системы координат,  $z$  – координата вдоль оси конуса (рис. 3).



**Рис. 3.** Система координат вблизи вершины конуса.

На поверхности конуса должны выполняться граничные условия (4), (6), которые при равновесии в размерных переменных имеют вид:

$$\langle \Phi \rangle = 0, \quad \langle \epsilon E_n \rangle = 0, \\ \langle p \rangle = \langle \epsilon E_n^2 \rangle - \langle \epsilon \rangle E_{1r}^2 + \alpha \frac{1}{r r_z} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{r}{\sqrt{1 + (r_z)^2}} \right), \quad (50)$$

где  $r_z = dr(z)/dz$ .

Решение для потенциалов  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  запишется в виде  $\Phi_i = C_i r^\nu P_i(\theta)$ , где  $C_i$ ,  $\nu$  – константы, подлежащие определению,  $P_i(\theta)$  – неизвестные функции,  $i = 1, 2$ . С учетом  $E_{in} = C_i r^\nu dP_i(\theta)/d\theta$ ,  $E_{ir} = C_i \nu r^{\nu-1} P_i(\theta)$ ,  $r_z = 1/\cos\theta_0$  из последнего условия в (50) получаем  $\nu = 1/2$ , так что давление внутри конуса будет выражаться как  $p = p_0 + A/\Gamma$ , где  $p_0$  – внешнее давление,  $A$  – функция параметров  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$ ,  $\alpha$ ,  $\theta_0$  и напряженности внешнего поля. Для функций  $P_i(\theta)$  из уравнения Лапласа  $\Delta\Phi_i = 0$  получаем:

$$(1 - x^2) d^2 P_i / dx^2 - 2x dP_i / dx + \nu(\nu + 1) P_i = 0, \\ \nu = 1/2, \quad x = \cos\theta. \quad (51)$$

Решения уравнения (51) определяются функциями Лежандра, которые выражаются



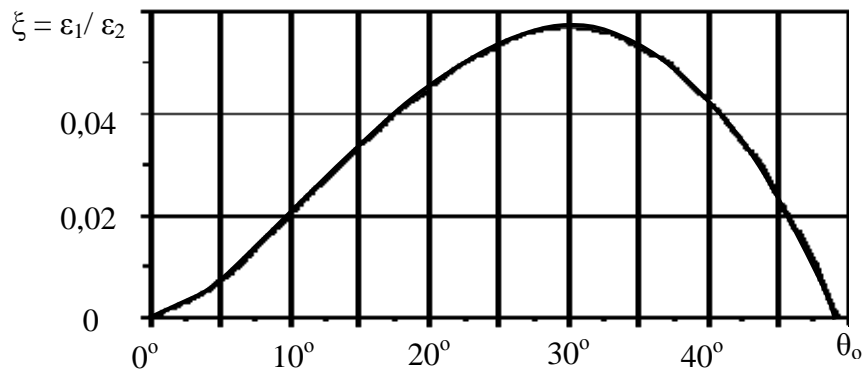


Рис. 4. График зависимости и табличные значения  $\theta_0$  от  $\xi = \varepsilon_1/\varepsilon_2$  согласно уравнению (52).

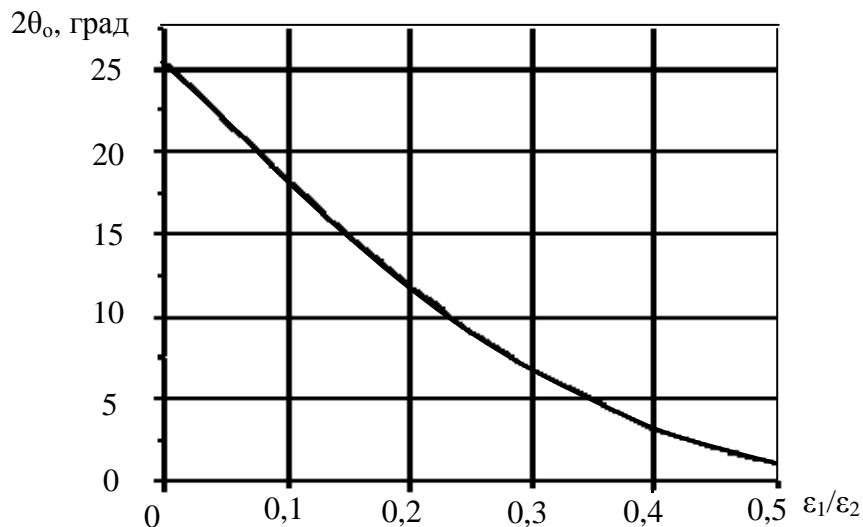


Рис. 5. Результаты численного решения уравнения (53).

через гипергеометрическую функцию  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ . В работах [10, 16] в качестве линейно независимых решений выбирались несимметричные функции Лежандра:

$$P_i(z_i(x)) = F(1 + \nu, -\nu, 1, z_i(x)) \quad (i = 1, 2);$$

$$z_1(x) = (1 + x)/2, \quad z_2(x) = (1 - x)/2.$$

Используя эти функции и первые два условия в (50), получаем следующее уравнение, определяющее угол  $\theta_0$ :

$$\xi = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = -\frac{P_1(z_1(x))[dP_2(z_2(x))/dz_2]}{P_2(z_2(x))[dP_1(z_1(x))/z_1]} \quad (52)$$

Корни этого уравнения как функции параметра  $\xi$  были вычислены в работе [16] и представлены на рис. 4.

Из этих расчетов следует, что поляризационные конусы должны наблюдаться только при условии  $\varepsilon_2 > 17,6\varepsilon_1$ , причем при равенстве  $\varepsilon_2 = 17,6\varepsilon_1$  угол конуса составляет  $60^\circ$ , а при  $\varepsilon_2 > 17,6\varepsilon_1$  должны появляться конусы с двумя различными углами. Например, при  $\varepsilon_2 = 50\varepsilon_1$  первый угол будет  $19,9^\circ$ , а второй –  $91,6^\circ$ . Эти данные вызывают сомнения, так как эксперименты показывают, что конусы, например магнитной жидкости, образуются при произвольных значениях магнитных проницаемостей. Поэтому

нами были проведены расчеты при симметричной  $P_1(x)$  и антисимметричной  $P_2(x)$  функций Лежандра [19, 20]:

$$P_1(x) = F_1(z), \quad P_2(x) = xF_2(z), \quad z = x^2,$$

$$F_1(z) = F(-\nu/2, 1/2 + \nu/2, 1/2, z),$$

$$F_2(z) = F(1/2 - \nu/2, 1 + \nu/2, 3/2, z).$$

В этом случае вместо (52) получаем уравнение:

$$F_1(z)[F_2(z) + 2z dF_2(z)/dz] = \xi 2z F_2(z) dF_1(z)/dz, \quad \xi = \varepsilon_1/\varepsilon_2. \quad (53)$$

Результаты численного решения уравнения (53) представлены на рис. 5.

Сравнение результата расчета с формой одиночных стационарных пиков высококонцентрированной магнитной жидкости с магнитной проницаемостью  $\mu \gg 1$  по результатам экспериментов [21] показано на рис. 6. Условие  $\varepsilon_1/\varepsilon_2 \ll 1$  эквивалентно эквипотенциальности поверхности. Например, когда верхняя область заполнена непроводящим газом, а нижняя – идеальным проводником.

Как видно из рис. 4 и 5, углы при вершине конуса могут составлять  $25,6^\circ$  и  $98^\circ$ . Результаты расчетов по уравнению (53) в отличие от расче-

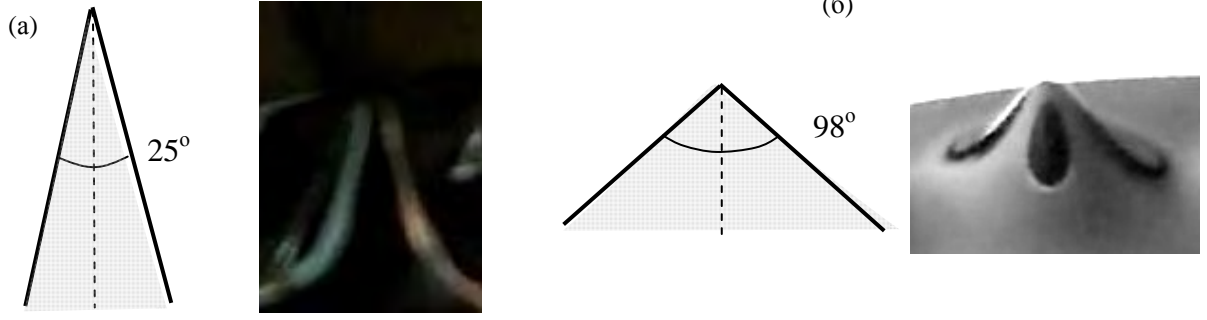


Рис. 6. Экспериментальные конусы в магнитной жидкости: (а) – конус с углом  $25^\circ$ ; (б) – с углами  $98^\circ$ .

тов рис. 4 показывают, что конусы могут образовываться при любых соотношениях между диэлектрическими проницаемостями жидкостей, удовлетворяющими условию  $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ , что согласуется с экспериментальными наблюдениями.

#### 4.5. Динамика поляризующихся многослойных жидкостей

Задачи о динамике трех- и двухслойных жидкостей с двумя свободными поверхностями вызывают интерес как с теоретической, так и прикладной точек зрения. Если теоретический интерес не вызывает сомнений, то в качестве прикладных примеров можно указать задачи об устойчивости поверхностей при производстве многослойных капсул или микротрубочек электростатическим методом [3, 4].

Вначале рассмотрим систему из трех слоев несмешивающихся поляризующихся жидкостей. Такая постановка задачи интересна тем, что предельными переходами диэлектрических проницаемостей можно получить решения задач, когда один или два жидких слоя являются идеальными проводниками.

Так же, как и при решении задачи о двухслойной жидкости (рис. 1), будем использовать индексные обозначения. Причем индексы 1, 2, 3 относятся к верхней, средней и нижней жидкостям соответственно (рис. 7).

Краевая задача имеет вид, аналогичный (1)–(8), с тем отличием, что динамические условия на свободных поверхностях будут иметь вид:

$$z = \varepsilon f_1 :$$

$$\langle \rho \Psi_t \rangle_1 + \frac{1}{2\mu^2} \langle \rho |\nabla \Psi|^2 \rangle_1 + \varepsilon \langle \rho \rangle_1 f_1 + \frac{W_1}{2} (\langle \varepsilon E_n^2 \rangle_1 - \langle \varepsilon E_\tau^2 \rangle_1) + \varepsilon \mu^2 \gamma_1 H_1 = C_1(t),$$

$$z = -1 + \varepsilon f_2 :$$

$$\langle \rho \Psi_t \rangle_2 + \frac{1}{2\mu^2} \langle \rho |\nabla \Psi|^2 \rangle_2 + \varepsilon \langle \rho \rangle_2 f_2 + \frac{W_2}{2} (\langle \varepsilon E_n^2 \rangle_2 - \langle \varepsilon E_\tau^2 \rangle_2) + \varepsilon \mu^2 \gamma_2 H_2 = C_2(t).$$

Безразмерные параметры  $\varepsilon$ ,  $\mu$  определяются согласно (8), остальные соотношения и параметры выводятся как:

$$\begin{aligned} \langle \rho \Psi_t \rangle_1 &= \rho_{12} \Psi_{1t} - \Psi_{2t}, \\ \langle \rho |\nabla \Psi|^2 \rangle_1 &= \rho_{12} (\Psi_{1z}^2 + \mu^2 |\nabla_1 \Psi_1|^2) - (\Psi_{2z}^2 + \mu^2 |\nabla_1 \Psi_2|^2), \\ \langle \rho \rangle_1 &= \rho_{12} - 1, \\ \langle \varepsilon E_n^2 \rangle_1 &= \varepsilon_1 E_{1n}^2 - \varepsilon_2 E_{2n}^2, \quad \langle \varepsilon E_\tau^2 \rangle_1 = \varepsilon_1 E_{1\tau}^2 - \varepsilon_2 E_{2\tau}^2; \\ \langle \rho \Psi_t \rangle_2 &= \Psi_{2t} - \rho_{32} \Psi_{3t}, \\ \langle \rho |\nabla \Psi|^2 \rangle_2 &= \rho_{23} (\Psi_{2z}^2 + \mu^2 |\nabla_1 \Psi_2|^2) - (\Psi_{3z}^2 + \mu^2 |\nabla_1 \Psi_3|^2), \\ \langle \rho \rangle_2 &= \rho_{23} - 1, \\ \langle \varepsilon E_n^2 \rangle_2 &= \varepsilon_2 E_{2n}^2 - \varepsilon_3 E_{3n}^2, \quad \langle \varepsilon E_\tau^2 \rangle_2 = \varepsilon_2 E_{2\tau}^2 - \varepsilon_3 E_{3\tau}^2; \\ H_i &= \operatorname{div}_1 \left( \frac{\nabla_1 f_i}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \mu^2 |\nabla_1 f_i|^2}} \right), \quad i = 1, 2; \quad h_{12} = \frac{h_1}{h_2}, \\ & \quad h_{32} = \frac{h_3}{h_2}, \\ \rho_{12} &= \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad \rho_{23} = \frac{\rho_2}{\rho_3}, \quad W_1 = \frac{\varepsilon_0 U^2}{\rho_2 g h_2^3}, \quad W_2 = \frac{\varepsilon_0 U^2}{\rho_3 g h_2^3}, \\ \gamma_1 &= \frac{\alpha_1}{\rho_2 g h_2^2}, \quad \gamma_2 = \frac{\alpha_2}{\rho_3 g h_2^2}. \end{aligned}$$

Нелинейные уравнения в длинноволновом приближении определяются по методике, описанной в разделе 3. Именно решения разыскиваются в виде (9) и вводим две неизвестные функции  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$ :

$$z = 0: \Psi_1 = \Psi_{21}, \quad z = -1: \Psi_2 = \Psi_{31}.$$

Приведем окончательную систему уравнений:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \Delta_1 \Psi_{12}^+ + \varepsilon \operatorname{div}_1 (f_1 \nabla_1 \Psi_1 + f_2 \nabla_1 \Psi_{21}^-) + \quad (54)$$

$$\left[ \frac{\Psi_1}{3} + \left( \frac{h_{32}}{2} + \frac{h_{32}^3}{3} \right) \Psi_2 \right] = 0;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial t} + h_{32} \Delta_1 \Psi_2 + \varepsilon \operatorname{div}_1 (f_2 \nabla_1 \Psi_2) + \quad (55) \\ + \mu^2 \frac{h_{32}^3}{3} \Delta_1^2 \Psi_2 = 0; \end{aligned}$$

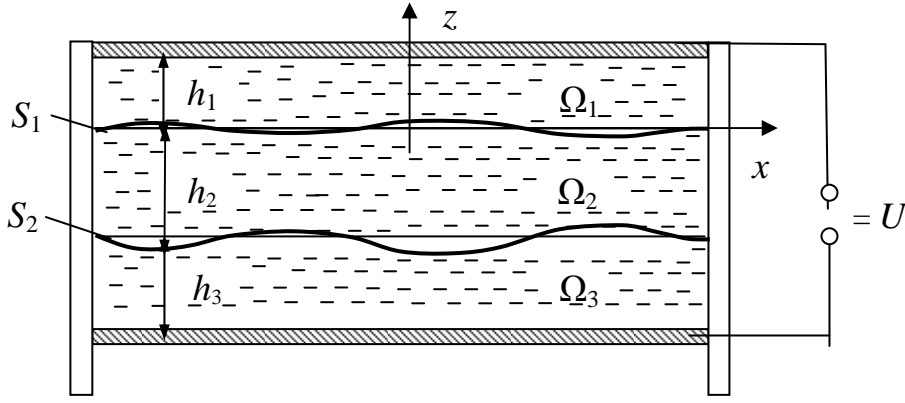


Рис. 7. К постановке задачи о трехслойной системе жидкостей.

$$\langle \rho \Psi \rangle_1 + \widehat{G}_1[f_1, f_2] + \mu^2 \Delta_1 D_{1t} = C_1(t); \quad (56)$$

$$\langle \rho \Psi \rangle_2 + \widehat{G}_2[f_1, f_2] + \mu^2 \Delta_1 D_{2t} = C_2(t). \quad (57)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\langle \rho \Psi \rangle_1 = -\frac{\rho_{12}}{h_{12}} \frac{\partial \Psi_{12}^+}{\partial t} + \quad (58)$$

$$+ \varepsilon \rho_{12} \left( \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial t} + \frac{1}{2h_{12}^2} |\nabla_1 \Psi_{12}^+|^2 \right) - \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{2} |\nabla_1 \Psi_1|^2;$$

$$\langle \rho \Psi \rangle_2 = \rho_{23} \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + \varepsilon \frac{\rho_{23}}{2} |\nabla_1 \Psi_1|^2 - \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{2} |\nabla_1 \Psi_2|^2;$$

$$\Psi_{12}^+ = \Psi_1 + h_{32} \Psi_2;$$

$$\Psi_{21}^- = \Psi_2 - \Psi_1, \quad Z_1 = \frac{W_1}{B_0 h_\varepsilon^2 h_{12} h_{32}}, \quad Z_2 = \frac{W_2}{B_0 h_\varepsilon^2 h_{32} h_{32}},$$

$$\varepsilon_{21} = \varepsilon_2 - \varepsilon_1, \quad \varepsilon_{32} = \varepsilon_3 - \varepsilon_2, \quad h_\varepsilon = 1 + 1/\beta_1 + 1/\beta_2,$$

$$B_0 = \beta_1 + \beta_1 + \beta_1 \beta_2, \quad \beta_1 = \varepsilon_1 / (\varepsilon_2 h_{12}), \quad \beta_2 = \varepsilon_3 / (\varepsilon_2 h_{32}),$$

$$g_{11} = h_{32} (\beta_1 \beta_2 (h_{32}^2 + \beta_2 + 3) + 3\beta_1 + \beta_2^2 h_{12}^2) / B_0,$$

$$g_{12} = (\beta_1 h_{32}^2 + \beta_2 h_{12}^2 - 3(1 + \beta_1/2 + \beta_2/2) - \beta_1 \beta_2 / 2) / B_0,$$

$$g_{22} = h_{12} (\beta_1 \beta_2 (h_{12}^2 + \beta_1 + 3) + 3\beta_2 + \beta_1^2 h_{32}^2) / B_0;$$

$$D_1 = \rho_{12} \left[ \frac{1}{3} (h_{12}^2 - 1) \Psi_1 + \frac{h_{32}}{h_{12}} \left( \frac{1}{3} (h_{12}^2 - h_{32}^2) - \frac{1}{2} \right) \Psi_2 \right],$$

$$D_2 = \rho_{32} (h_{32} \Psi_2 + \Psi_1 / 2);$$

$$\widehat{G}_1[f_1, f_2] = Z_1 \frac{\varepsilon_3 \varepsilon_{21}}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \left( \varepsilon_{21} f_1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} \varepsilon_{32} f_2 \right) +$$

$$+ \varepsilon \frac{3Z_1 \varepsilon_1 \varepsilon_{21}}{2B_1 \varepsilon_2^3} \left( \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} \varepsilon_{21} f_1 + \varepsilon_{32} f_2 \right)^2 +$$

$$+ \langle \rho \rangle_1 f_1 + \mu^2 \Delta_1 \left[ \gamma_1 f_1 - \frac{Z_1 \varepsilon_{21}}{3\varepsilon_1 \varepsilon_2} (\varepsilon_2 \varepsilon_{21} g_{11} f_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_{32} g_{12} f_2) \right];$$

$$\widehat{G}_2[f_1, f_2] = Z_2 \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_{32}}{\varepsilon_3 \varepsilon_2} \left( \varepsilon_{32} f_2 + \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} \varepsilon_{21} f_1 \right) +$$

$$+ \varepsilon \frac{3Z_2 \varepsilon_3 \varepsilon_{32}}{2B_1 \varepsilon_2^3} \left( \varepsilon_{21} f_1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} \varepsilon_{32} f_2 \right)^2 +$$

$$+ \langle \rho \rangle_2 f_2 + \mu^2 \Delta_1 \left[ \gamma_2 f_2 - \frac{Z_2 \varepsilon_{32}}{3\varepsilon_3 \varepsilon_2} (\varepsilon_2 \varepsilon_{32} g_{22} f_2 + \varepsilon_3 \varepsilon_{21} g_{12} f_1) \right].$$

Функция  $\Psi_{12}$  вычисляется при  $z = 0$  и определяется уравнением:

$$\Delta_1 \Psi_{12} = (1/h_{12}) \operatorname{div}_1 \times \times [f_2 \nabla_1 (\Psi_1 - \Psi_2) - f_1 \nabla_1 ((1 + 1/h_{12}) \Psi_1 + (h_{32}/h_{12}) \Psi_2)].$$

Система уравнений (54)–(58) в предельных случаях обращения диэлектрических проницаемостей в бесконечность описывает различные с физической точки зрения задачи, вызывающие научный и прикладной интерес, которые рассматриваются ниже. В стационарном случае она допускает решения в виде уединенных локализованных образований, медленные движения которых представляются разложениями вида (48):

$$f_i = F_i(\tau, x, y) + \zeta F_{i1}(\tau, x, y) + \dots,$$

$$\Psi_i = \zeta H_i(\tau, x, y) + \zeta^2 H_{i2}(\tau, x, y) + \dots \quad (i = 1, 2),$$

$\zeta = \sqrt{\varepsilon}$  и описываются уравнениями:

$$\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left[ \left( \frac{\rho_{12}}{h_{12}} + 1 \right) F_1 - F_2 \right] + \Delta_1 \widehat{G}_1[f_1, f_2] = 0; \quad (59)$$

$$\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left[ \left( \frac{1}{h_{32}} + \rho_{32} \right) F_2 - \rho_{32} F_1 \right] + \Delta_1 \widehat{G}_2[f_1, f_2] = 0. \quad (60)$$

Характерные особенности этой системы можно выявить на примере плоских локализованных бегущих волн вида

$$F_i = A_i \operatorname{ch}^{-2}(b\xi), \quad \xi = x - V\tau. \quad (i = 1, 2). \quad (61)$$

В этом случае неизвестные параметры определяются следующей системой четырех уравнений:

$$\delta_1 A_1 - \chi_2 A_2 + 4b^2 (\zeta_{11} A_1 - \zeta_{12} A_2) = 0,$$

$$\delta_2 A_2 - \chi_1 A_1 + 4b^2 (\zeta_{22} A_2 - \zeta_{21} A_1) = 0,$$

$$\kappa_1 (\sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2)^2 + 6b^2 (\zeta_{11} A_1 - \zeta_{12} A_2) = 0,$$

$$\kappa_2 (\sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2)^2 + 6b^2 (\zeta_{22} A_2 - \zeta_{21} A_1) = 0,$$

где коэффициенты  $\delta_i$ ,  $\chi_i$ ,  $\zeta_{ij}$ ,  $\kappa_i$ ,  $\sigma_i$  ( $i, j = 1, 2$ ) определяются параметрами задачи, причем от скорости  $V$  зависят (линейно) только коэффициенты  $\delta_i$ ,  $\chi_i$ .

Опишем кратко методику решения этой системы. Из последних двух уравнений находим

связь между амплитудами  $A_1$ ,  $A_2$  в виде  $A_1 = (p_2/p_1)A_2$ ,  $p_1 = \kappa_2\zeta_{11} + \kappa_1\zeta_{21}$ ,  $p_2 = \kappa_1\zeta_{22} + \kappa_2\zeta_{12}$ , а первые два уравнения дают два выражения для параметра  $b$ :

$$b^2 = \frac{\delta_1 p_2 - \chi_2 p_1}{4(\zeta_{11} p_2 - \zeta_{12} p_1)} = \frac{\delta_2 p_1 - \chi_1 p_2}{4(\zeta_{22} p_1 - \zeta_{21} p_2)}.$$

Правое равенство однозначно определяет скорость  $V$ , а левое – параметр  $b$ . Наконец, из последних уравнений находим амплитуды  $A_1$ ,  $A_2$ . Отметим характерные особенности уединенных бегущих волн.

1) В трехслойных жидкостях с двумя свободными поверхностями уединенные волны имеют фиксированную скорость движения, тогда как в двухслойных жидкостях скорость уединенной волны может быть произвольной. 2) Амплитуды  $A_1$ ,  $A_2$  и линейные размеры, определяемые параметром  $b$ , зависят как от скорости волны, так и от напряженностей внешних полей. 3) Уединенные волны спарены, то есть координаты максимумов деформаций поверхностей одинаковы.

Конкретные зависимости форм уединенных волн и их свойства рассмотрим ниже в различных предельных случаях.

#### 4.6. Многослойные жидкости типа «диэлектрик – идеальный проводник»

Рассмотрим другие предельные случаи, когда одна или две жидкости являются идеальными проводниками, а оставшиеся – идеальными диэлектриками. Так как в реальных диэлектрических жидкостях всегда имеются заряды, то рассматриваемые приближения соответствуют случаям, когда релаксация зарядов в одной из жидкостей (идеальный проводник) происходит значительно быстрее, чем в другой (идеальный диэлектрик). Отметим, что во всех предельных переходах уравнения (54), (55) не изменяются, тогда как уравнения (56), (57) примут другой вид.

1. *Верхняя и нижняя жидкости – идеальные проводники, средняя – идеальный диэлектрик.* Этот случай соответствует предельному переходу  $\varepsilon_1 \rightarrow \infty$ ,  $\varepsilon_3 \rightarrow \infty$ , так что в уравнениях (56), (57) изменятся только операторы  $\hat{G}_1[f_1, f_2]$ ,  $\hat{G}_2[f_1, f_2]$ :

$$\begin{aligned} \hat{G}_1[f_1, f_2] = & \langle \rho \rangle_1 f_1 + W_1(f_1 - f_2) - \\ & - \varepsilon(3/2)\varepsilon_2 W_1(f_1 - f_2)^2 + \\ & + \mu^2 \Delta_1 [\gamma_1 f_1 - W_1/3(f_1 + f_2/2)]; \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \hat{G}_2[f_1, f_2] = & \langle \rho \rangle_2 f_2 + W_2(f_2 - f_1) + \\ & + \varepsilon(3/2)\varepsilon_2 W_2(f_1 - f_2)^2 + \\ & + \mu^2 \Delta_1 [\gamma_2 f_2 - W_2/3(f_2 + f_1/2)]; \end{aligned} \quad (63)$$

$$W_1 = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0 E_0^2}{\rho_2 g h_2}, \quad W_2 = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0 E_0^2}{\rho_3 g h_2}, \quad E_0 = \frac{U}{h_2},$$

$$\gamma_1 = \frac{\alpha_1}{\rho_2 g h_2^2}, \quad \gamma_2 = \frac{\alpha_2}{\rho_3 g h_2^2}.$$

Подставляя (62), (63) в уравнения (59), (60), получаем систему уравнений, описывающую стационарные медленно движущиеся нелинейные формы поверхностей. Анализ плоских уединенных волн вида (61) проведем для  $\alpha_1 = \alpha_2$ , когда получаются обозримые выражения. В этом случае деформация поверхностей имеет вид спаренных антисимметричных лунок или бугорков  $A_1 = -A_2$ , так что  $V$ ,  $A_1$ ,  $b$  выражаются как

$$c = \sqrt{\frac{\rho_1 + \rho_3 - 2\rho_2}{\varepsilon(\rho_3/h_{32} - \rho_1/h_{12})}}, \quad A_1 = \frac{W - W_* + \varepsilon\delta_0 V^2}{2\varepsilon\varepsilon_2 W},$$

$$\frac{1}{b} = \sqrt{\frac{2\mu^2(W_1 - 6\gamma_1)}{3(W - W_* + \varepsilon\delta_0 V^2)}}, \quad (64)$$

где  $W = 2W_1$ ,  $W_* = 1 - \rho_{12}$ ,  $\delta_0 = 2 + \rho_{12}/h_{12}$ .

В докритической области  $W < W_* - \varepsilon\delta_0 c^2$  и  $W_1 < 6\gamma_1$  спаренная деформация имеет форму, изображенную на рис. 8а. Причем с ростом поля (параметра  $W$ ) амплитуда деформаций уменьшается, а линейный размер  $l_E = 1/b$  увеличивается, так что на границе устойчивости  $W = W_* - \varepsilon\delta_0 V^2$  деформация исчезает. В закритической области  $W > W_* - \varepsilon\delta_0 V^2$  и  $W_1 > 6\gamma_1$  деформация имеет форму, показанную на рис. 8б. Увеличение напряженности поля приводит к медленному росту амплитуды деформации, тогда как линейный размер слабо изменяется. Наконец, при выполнении условия  $\rho_1 + \rho_3 = 2\rho_2$  спаренная деформация неподвижна и ее параметры определяются соотношениями (64), в которых  $V = 0$ .

2. *Нижняя жидкость – идеальный проводник, средняя и верхняя – идеальные диэлектрики.* Устремляя  $\varepsilon_3 \rightarrow \infty$ , получаем систему (54)–(57), в которой:

$$\begin{aligned} \hat{G}_1[f_1, f_2] = & \langle \rho \rangle_1 f_1 + \frac{Q_1 \varepsilon_{21}}{\varepsilon_1} (\varepsilon_{21} f_1 + \varepsilon_1 f_2) + \\ & + \varepsilon \frac{3Q_1 \varepsilon_{21}}{2(1 + \beta_1) h_{12} \varepsilon_1 \varepsilon_2} (\varepsilon_{21} f_1 + \varepsilon_1 f_2)^2 + \end{aligned} \quad (65)$$

$$+ \mu^2 \Delta_1 \left[ \gamma_1 f_1 - \frac{Q_1 \varepsilon_{21}}{3(1 + \beta_1) \varepsilon_1} (\varepsilon_2 \varepsilon_{21} w_{11} f_1 + \varepsilon_1 w_{12} f_2) \right];$$

$$\begin{aligned} \hat{G}_2[f_1, f_2] = & \langle \rho \rangle_2 f_2 + Q_2 (\varepsilon_{21} f_1 + \varepsilon_1 f_2) + \\ & + \varepsilon \frac{3Q_2}{2(1 + \beta_1) h_{12} \varepsilon_2} (\varepsilon_{21} f_1 + \varepsilon_1 f_2)^2 + \end{aligned} \quad (66)$$

$$+ \mu^2 \Delta_1 \left[ \gamma_2 f_2 - \frac{Q_2}{3(1 + \beta_1)} (\varepsilon_2 w_{22} f_2 + \varepsilon_{21} w_{12} f_1) \right].$$

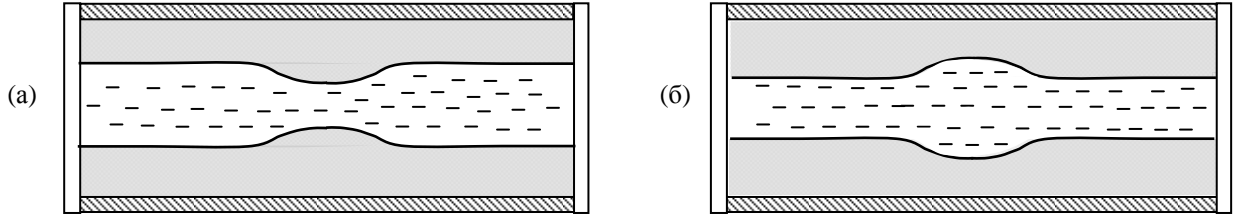


Рис. 8. Формы спаренных лунок: докритическая (а); закритическая области (б).

Здесь введены следующие обозначения:

$$Q_1 = \frac{W_1}{(1+\beta_1)h_\varepsilon^2 h_{12}}, \quad Q_2 = \frac{W_2}{(1+\beta_1)h_\varepsilon^2 h_{12}}, \quad h_\varepsilon = 1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} h_{12},$$

$$w_{11} = (\beta_1 + h_{12}^2)/\varepsilon_2, \quad w_{12} = h_{32}^2 - 3/2 - \beta_2/2,$$

$$w_{22} = h_{12} (\beta_1 (h_{32}^2 + \beta_1 + 3) + 3).$$

Остальные обозначения определяются согласно (58). Можно показать, что локализованные деформации обладают различными формами, в частности, могут быть как симметричными, так и несимметричными.

3. Средняя жидкость – идеальный проводник, верхняя и нижняя – идеальные диэлектрики. Этот предельный случай соответствует условию  $\varepsilon_2 \rightarrow \infty$ , однако выражения для операторов  $\hat{G}_1[f_1, f_2]$ ,  $\hat{G}_2[f_1, f_2]$  нельзя получить формальным переходом  $\varepsilon_2 \rightarrow \infty$ , так как при выводе (65) использовалось условие конечности  $\varepsilon_2$ . Непосредственные вычисления дают:

$$\hat{G}_1[f_1, f_2] = \langle \rho \rangle_1 f_1 + G_1 f_1 + \varepsilon \frac{3G_1}{2h_{12}} f_1^2 + \mu^2 \Delta_1 \left( \gamma_1 f_1 - \frac{G_1 h_{12}^2}{3} f_1 \right), \quad (67)$$

$$\hat{G}_1[f_1, f_2] = \langle \rho \rangle_2 f_2 + G_2 f_2 - \varepsilon \frac{3G_2}{2h_{32}} f_2^2 + \mu^2 \Delta_1 \left( \gamma_2 f_2 - \frac{G_2 h_{32}^2}{3} f_2 \right), \quad (68)$$

$$G_1 = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0 E_{10}^2}{\rho_2 g h_1}, \quad E_{10} = \frac{U}{h_1}, \quad G_2 = \frac{\varepsilon_3 \varepsilon_0 E_{30}^2}{\rho_3 g h_3}, \quad E_{30} = \frac{U}{h_3}.$$

Обратим внимание на разные знаки перед нелинейными членами в уравнениях (67), (68). Это приводит к тому, что в закритической области  $G_1 > G_1^* = 1 - \rho_{12}$ ,  $G_2 > G_2^* = 1 - \rho_{23}$  стационарные локализованные образования имеют прогиб в сторону идеального проводника так, как указано на рис. 8а. Причем их положения могут быть произвольными на поверхностях. Однако движущиеся деформации – только спаренные, причем, как было отмечено выше, скорость их движения фиксирована.

#### 4.6.1. ЭГД-эффект «мертвой воды»

Когда верхняя поверхность имеет поверхностный заряд, то возникает так называемый электрогидродинамический (ЭГД) эффект «мертвой воды», который был исследован в

линейном приближении в работе [6]. Суть этого эффекта заключается в том, что на верхней поверхности развиваются длинноволновые возмущения (иллюзия «штиля»), а на нижней – интенсивные колебания в коротковолновой области. С физической точки зрения этот эффект можно объяснить тем, что электрическое поле, действуя на поверхностный заряд, подавляет возмущения в верхней поверхности в докритической области. При этом на ней наиболее интенсивно развиваются длинноволновые возмущения. Нижняя же поверхность жидкости не заряжена, поэтому ее колебания обусловлены в основном гравитационными волнами. Оба этих явления и объясняют вышеуказанный эффект «мертвой воды». Ясно, что его исследование в нелинейной постановке при наличии поверхностного заряда на верхней поверхности вызывает не только теоретический, но и прикладной интерес.

*Линейный анализ.* Основные закономерности развития неустойчивости рассматриваемой системы можно выявить, исследуя линейную задачу относительно нормальных возмущений вида (15). В этом случае для амплитуд отклонений поверхностей  $f_{10}$ ,  $f_{20}$  получаем следующую линейную однородную систему (размерные переменные):

$$\begin{aligned} (\omega^2 - \omega_1^2(k)) f_{10} - \omega^2 \xi_1 f_{20} &= 0, \\ (\omega^2 - \omega_2^2(k)) f_{20} - \omega^2 \xi_2 f_{10} &= 0, \end{aligned} \quad (69)$$

$$\omega_1^2(k) = k D_1(k) / H_{12}(k), \quad \omega_2^2(k) = k D_2(k) / H_{23}(k),$$

$$D_1(k) = \alpha_1 k^2 + (\rho_2 - \rho_1) g - \varepsilon_1 \varepsilon_0 E_0^2 k \text{cth}(k h_1),$$

$$D_2(k) = \alpha_2 k^2 + (\rho_3 - \rho_2) g,$$

$$H_{12}(k) = \rho_1 \text{cth}(k h_1) + \rho_2 \text{cth}(k h_2),$$

$$H_{23}(k) = \rho_2 \text{cth}(k h_2) + \rho_3 \text{cth}(k h_3),$$

$$\xi_1 = \frac{\rho_2}{\text{sh}(k h_2) H_{12}(k)}, \quad \xi_2 = \frac{\rho_2}{\text{sh}(k h_2) H_{23}(k)}.$$

Из (69) видно, что при  $\xi_1 \ll 1$ ,  $\xi_2 \ll 1$  поверхности не взаимодействуют и колеблются с частотами  $\omega_1(k)$ ,  $\omega_2(k)$ . Поэтому величины  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  можно назвать параметрами взаимодействия.

С ростом напряженности поля частота колебаний заряженной поверхности уменьшается.

Таким образом, в окрестности критической напряженности  $E_o \sim E_*$  будет  $\omega_1(k) \cong 0$ . В этом случае амплитуды колебаний связаны соотношением  $f_{10} = \xi_1 f_{20}$ , при этом частота колебаний выражается как  $\omega = \omega_* = \omega_2(k) / \sqrt{1 - \xi_1 \xi_2}$ .

Нетрудно проверить, что  $1 - \xi_1 \xi_2 > 0$ , поэтому частота  $\omega_*$  имеет смысл при любых значениях параметров. Если выполняются условия  $\omega_1(k) \ll \omega_*$ ,  $\omega_1(k) \ll \xi_1 \ll 1$ , то амплитуда колебаний нижней поверхности будет значительно больше амплитуды колебаний верхней поверхности  $f_{10}/f_{20} = \xi_1 \ll 1$ , что создает электрогидродинамический аналог эффекта «мертвой воды». Можно предположить, что подобный эффект может иметь место в грозовую погоду в прибрежных морях, где имеется расслоение соленых и пресных вод.

*Нелинейный анализ.* Будем считать, что верхняя область  $\Omega_1$  заполнена газом ( $\rho_{12} \ll 1$ ), а жидкости в средней и нижней областях  $\Omega_2, \Omega_3$  являются идеальными проводниками ( $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 \gg \varepsilon_1$ ). Система нелинейных уравнений в этом случае следует из (54)–(57) при  $\rho_{12} = 0$ ,  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 \rightarrow \infty$ , причем первые два уравнения (54), (55) не изменяются, а уравнения (56), (57) примут вид:

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + c_1^2 f_1 + \frac{\varepsilon}{2} |\nabla_1 \Psi_1|^2 - \frac{3}{2} \varepsilon \frac{W}{h_2} f_1^2 + \quad (70)$$

$$+ \mu^2 \left( \frac{1}{3} W_2 - \gamma_1 \right) \Delta_1 f_1 = C_1(t);$$

$$\rho \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + c_2^2 f_2 + \frac{\varepsilon}{2} (\rho |\nabla_1 \Psi_2|^2 - |\nabla_1 \Psi_1|^2) + \quad (71)$$

$$- \mu^2 \Delta_1 \left( h \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} - \gamma_2 f_2 \right) = C_2(t);$$

$$\rho = \frac{\rho_3}{\rho_2}, h = \frac{h_3}{h_2}, W_2 = W h_{12}^2, W = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_o E_o^2}{\rho_2 g h_1}, E_o = \frac{U}{h_1},$$

$$\gamma_1 = \frac{\alpha_1}{\rho_2 g h_2^2}, \gamma_2 = \frac{\alpha_2}{\rho_2 g h_2^2}.$$

Здесь  $c_1 = \sqrt{1 - W}$ ,  $c_2 = \sqrt{\rho - 1}$  – безразмерные фазовые скорости распространения линейных волн на верхней и нижней поверхностях при отсутствии их взаимодействия.

В докритической области  $W < 1$  при  $1 - W \gg \varepsilon$  и в плоском случае эту систему можно записать в виде (39), где  $\vec{u} = [f_1, V_1, f_2, V_2]^T$ ,  $V_i = \partial \Psi_i / \partial x$  ( $i = 1, 2$ ),  $A_i = \|a_{nm}^i\|$ ,  $i = 0, 1$ ,  $D = \|d_{nm}\|$  (штрих в индексе обозначает операцию транспонирования), а ненулевые компоненты 4-рядных матриц выражаются как:

$$a_{12}^0 = 1, a_{14}^0 = a_{34}^0 = h,$$

$$a_{21}^0 = c_1^2, a_{41}^0 = c_1^2 / \rho, a_{43}^0 = c_2^2 / \rho, \quad (72)$$

$$a_{11}^1 = V_1, a_{12}^1 = f_1 - f_2, a_{13}^1 = V_1 - V_2, a_{14}^1 = f_2,$$

$$a_{21}^1 = \rho a_{41}^1 = -3[W / (\rho h_{12})] f_1,$$

$$a_{22}^1 = V_1, a_{33}^1 = a_{44}^1 = V_2, a_{34}^1 = f_2,$$

$$d_{12} = 1/3, d_{14} = h(1/2 + h^2/3),$$

$$d_{21} = W_2/3 - \gamma_1, d_{34} = h^3/2,$$

$$d_{41} = (W_2/3 - \gamma_1 - c_1^2/2) / \rho, d_{43} = -(h c_2^2 + \gamma_2) / \rho.$$

Собственные значения  $\lambda$  и вектора матрицы  $A_0$  выражаются в виде:

$$\lambda_i = \sqrt{x_i} \quad (i = 1, 2),$$

$$x_1 = 0,5(b + \sqrt{b^2 - 4c}), x_2 = 0,5(b - \sqrt{b^2 - 4c}), \quad (73)$$

$$b = c_1^2(1 + h/\rho) + h c_2^2 / \rho, c = h c_1^2 c_2^2 / \rho, \vec{r}' = (r_1, r_2, r_3, 1),$$

$$r_1 = \frac{\rho}{c_1^2 \lambda} \left( \lambda^2 - \frac{c_2^2 h}{\rho} \right), r_2 = \frac{\rho}{\lambda^2} \left( \lambda^2 - \frac{c_2^2 h}{\rho} \right), r_3 = \frac{h}{\lambda}.$$

Применяя процедуру приближенного решения уравнения (39), получаем уравнение типа КдВ в виде (44), в котором:

$$c_o = \lambda, \xi_1 = \frac{A_{10} \vec{r} \cdot \vec{r}'}{\vec{r} \cdot \vec{r}'}, \xi_2 = \frac{D \vec{r} \cdot \vec{r}'}{\vec{r} \cdot \vec{r}'}, \quad (74)$$

где  $A_{10} = \|a_{nm}\|$ , причем ненулевые компоненты  $a_{nm}$  матрицы  $A_{10}$  выражаются как  $a_{11} = r_4$ ,  $a_{12} = r_1 - r_3$ ,  $a_{13} = 1 - r_2$ ,  $a_{14} = r_3$ ,  $a_{21} = \rho a_{41} = -3[W / (\rho h_{12})] r_1$ ,  $a_{22} = r_2$ ,  $a_{33} = a_{44} = 1$ ,  $a_{34} = r_3$ .

Выражения (74) показывают, что в общем случае существуют два типа нелинейных бегущих волн, распространяющихся со скоростями  $\lambda_1, \lambda_2$ . В силу многопараметричности задачи естественно рассмотреть характерные особенности нелинейных волн в различных предельных случаях.

При близких плотностях жидкостей будет выполняться  $c_2 = \sqrt{\rho - 1} \ll 1$ . В этом случае  $\lambda_1 = c_1 \sqrt{1 + \xi}$ ,  $\lambda_2 = c_2 \sqrt{\xi / (1 + \xi)}$ , где  $\xi = h/\rho = h_3 \rho_2 / (h_2 \rho_3)$ . Отсюда видно, что первая волна быстрая  $\lambda_1 \sim 1$ , вторая – медленная  $\lambda_2 \ll 1$ .

В случае быстрой волны компоненты собственного вектора  $\vec{r}' = [r_1, r_2, r_3, 1]^T$  матрицы  $A_0$  выражаются как  $r_1 = \rho \lambda_1 / c_1^2$ ,  $r_2 = \rho$ ,  $r_3 = h/\lambda_1$ . Закономерности нелинейных колебаний верхней и нижней поверхностей определяются отношением их амплитуд  $r_1/r_3 = (1 + \xi)/\xi$ . Следовательно, нижняя поверхность деформируется сильнее, чем верхняя, причем при  $\rho > 1$  амплитуда скоро-

сти течения верхней жидкости  $V_2 = \rho$  больше скорости течения нижней  $V_1 = 1$ , а при  $\rho < 1$  – наоборот. Однако последний случай маловероятен из-за неустойчивости нижней поверхности.

Для медленной волны имеем  $r_1 = -\rho \xi \lambda_2 / c_1^2$ ,  $r_2 = -h$ ,  $r_3 = h \sqrt{(1 + \xi) / \xi} / c_2$ . В этом случае нижняя поверхность деформируется сильнее, чем при быстрой волне  $r_1/r_3 \cong c_2^2 \ll 1$ . Причем деформации поверхностей раздела и скорости течений имеют разные знаки (находятся в «противофазе»), а при  $h \ll 1$  скорость течения верхней жидкости значительно меньше скорости течения нижней, что соответствует нелинейному аналогу эффекта «мертвой воды».

Рассмотрим теперь нелинейные эффекты в критической области  $1 - W \sim \varepsilon$ . В этом случае систему (59), (60) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \partial^2 F_1 / \partial \tau^2 &= \Delta_1 \left( (1 + \xi) \widehat{\Omega}_1[F_1] - \xi \widehat{\Omega}_2[F_2] \right), \\ \partial^2 F_2 / \partial \tau^2 &= \xi \Delta_1 \left( \widehat{\Omega}_1[F_1] - \widehat{\Omega}_2[F_2] \right); \quad (75) \\ \widehat{\Omega}_1[F_1] &= \chi_{10} \Delta_1 F_1 + \chi_{11} F_1 - \chi_{12} F_1^2, \\ \widehat{\Omega}_2[F_2] &= \chi_{20} \Delta_1 F_2 - \chi_{21} F_2, \\ \chi_{10} &= \frac{\mu^2}{\varepsilon} \left( \frac{1}{3} W - \gamma_1 \right) h_{12}, \quad \chi_{11} = \frac{1 - W}{\varepsilon}, \quad \chi_{12} = \frac{3W}{2h_{12}}, \\ \chi_{20} &= \frac{\mu^2}{\varepsilon} \gamma_2, \quad \chi_{21} = \frac{\rho - 1}{\varepsilon}, \quad \xi = \frac{h}{\rho} = \frac{h_3 \rho_2}{h_2 \rho_3}. \end{aligned}$$

Здесь, как и в (69),  $\xi$  – параметр взаимодействия между поверхностями.

Вычисления показывают, что нелинейная система (75) не содержит решений типа уединенных бегущих волн в виде стационарных, пульсирующих и бегущих лунок, валов или канавок. Это обусловлено отсутствием нелинейного члена в операторе  $\widehat{\Omega}_2[F_2]$ .

## 5. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АНАЛОГИИ

При любом приближенном анализе возникает естественный вопрос о близости решений точных уравнений к решениям приближенных уравнений. И вообще, может быть, решения приближенных уравнений являются свойствами приближений, а не свойствами точных уравнений? Применительно к гидродинамическим солитонам впервые ответ на этот вопрос дан в работе [22], где методами теории функций комплексного переменного доказано существование уединенных волн типа КдВ в точной постановке. В то же время в плоских задачах существует математическая аналогия между задачами гидродинамики и электростатики, например в задачах фильтрации жидкости в пористых средах. Подобная аналогия существует и в плоских задачах течений

идеальной жидкости со свободной поверхностью, и стационарной электростатической задаче о форме заряженной свободной поверхности идеально проводящей жидкости [23]. Отсюда можно сделать вывод, что, как и в гидродинамическом случае, стационарные деформации заряженной поверхности в виде лунок, канавок и т.д. описываются решениями точных уравнений, а не следствиями приближений. Существует еще одна аналогия, на которую следует обратить внимание. Наблюдения показывают, что локализованные деформации свободной поверхности, во-первых, инициируются потенциалами внешних полей и, во-вторых, ведут себя подобно частицам. Причем локализованные деформации на одной свободной поверхности могут двигаться с произвольными скоростями, испытывая продольное сжатие, а спаренные деформации на двух свободных поверхностях имеют фиксированную скорость. Оказывается, что подобное поведение можно описать математически, представляя функцию прогиба  $F$  в нелинейном уравнении (49) в виде произведения двух функций, одна из которых описывает форму локальной деформации, а вторая – ее движение. Причем свободное движение описывается парой уравнений, которые можно свести к одному, по форме совпадающему с уравнением Шредингера. Ниже подробнее рассмотрим вышеизложенные вопросы.

### 5.1. Гидродинамическая аналогия

В плоском случае задача о движении бегущей локализованной нелинейной волны в геометрии рис. 1а (верхняя область – газ) в системе координат, двигающейся поступательно со скоростью волны, в терминах функции тока  $V_x = \partial \psi / \partial y$ ,  $V_y = -\partial \psi / \partial x$  записывается как:

$$\Omega_2 : \Delta \psi = 0;$$

$$S : 2\alpha H_1 + \rho g f_1 + \frac{\rho}{2} |\nabla_1 \psi|^2 = C_1,$$

$$\psi = C_2; S_2 : \psi = C_3. \quad (76)$$

где  $\alpha$ ,  $H_1$  – коэффициент поверхностного натяжения и средняя кривизна поверхности и  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  – константы.

В то же время электростатическая задача определяется соотношениями:

$$\Omega_1 : \Delta \Phi = 0; S : 2\alpha H_2 + \rho g f_2 - \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{2} |\nabla \Phi|^2 = C_1,$$

$$\Phi = U; S_2 : \Phi = 0. \quad (77)$$

После замены  $f_2 = -f_1$ , с учетом правил знаков для средней кривизны, получим  $H_2 = -H_1 = -\left[ f_{1x} / (1 + f_{1x}^2) \right]_x$ , и задачи (76), (77) с точностью до обозначений совпадают. Это озна-

чает, что если в гидродинамическом случае уединенная волна имеет форму вала, то в электростатическом случае – форму уединенной канавки.

### 5.2. Квантово-механическая аналогия

Построим приближенное решение медленно движущихся нелинейных уединенных форм в критической области  $W_* - W \sim \varepsilon$  поверхности раздела двух поляризующихся жидкостей. Произведем замену переменных в системе уравнений (31)–(33) в виде (48). Тогда, опуская малые члены порядка  $\varepsilon$ ,  $\mu^2$ , получим:

$$F_\tau + \Delta_1 H = 0;$$

$$H_\tau - \delta^2 \Delta_1 F + \chi_1 F + \chi_2 F^2 + C(\tau) = 0, \quad (78)$$

где  $\delta^2 = (\mu^2 / \delta_0 \varepsilon) (\gamma - W\beta_3 / 3)$ ;  $\chi_1, \chi_2$  определены в (49).

Из системы (78) следует нелинейное уравнение (49). Однако систему (78) при определенных значениях параметров можно преобразовать в уравнение Шредингера следующим образом. Прежде всего отметим, что с изменением внешнего поля (величины  $W$ ) параметр  $\chi$  изменяет знак. Как показано в подразделе 4.3 (см. также эксперименты [21]), знак  $\chi$  существенно изменяет форму нелинейных образований: в критической области  $W > W_*$ ; при  $\chi > 0$  локализованные деформации имеют форму бугорков, а при  $\chi < 0$  – лунок. При  $\chi = 0$  никаких локализованных образований не появляется. Таким образом, с увеличением внешнего поля наблюдается своеобразный «фазовый переход» в формах локализованных образований. Будем считать  $\gamma > W\beta_3/3$ , так что  $\delta > 0$ . В окрестности подобного «фазового перехода» можно считать  $\varepsilon \ll \delta \ll 1$ . Тогда старшая производная во втором уравнении (78) содержит малый параметр  $\delta^2$ , что свидетельствует о наличии быстро изменяющегося решения, которое будем называть «частицей». Используя это замечание, сделаем замену  $\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \vec{r}'$ , где вектор  $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(\tau)$  определяет положение частицы, и будем искать приближенное решение системы (78) в виде:

$$\begin{aligned} F &= F_1(\tau, \vec{r}_1) [u_0 + u(\tau, \vec{r}_0, \vec{\rho})], \\ H &= H_1(\tau, \vec{r}_1) [h_0 + h(\tau, \vec{r}_0, \vec{\rho})], \quad (79) \\ \vec{r}_1 &= (x, y), \quad \vec{\rho} = \vec{r}' / \delta, \end{aligned}$$

где  $u_0, h_0$  – константы, а неизвестные функции  $u(\tau, \vec{r}_0, \vec{\rho}), h(\tau, \vec{r}_0, \vec{\rho})$  быстро убывают при  $|\vec{r}_1| \gg \delta$  ( $|\vec{\rho}| \gg 1$ ).

Подставляя эти выражения в (78) и выбирая произвольную константу в виде

$$C(\tau) = -(\chi_1 F_{10} u_0 + \chi_2 F_{10}^2 u_0^2),$$

где  $F_{10} \approx F_1(\tau, \vec{r}_0(\tau)), H_{10} = H_1(\tau, \vec{r}_0(\tau))$ , для неизвестных функций получим следующие уравнения.

В области  $|\vec{r}_1| \leq \delta$ :

$$F_{10} \Delta_{\vec{r}_0} u + (\chi_1 F_{10} + 2\chi_2 F_{10}^2 u_0) u + \chi_2 F_{10}^2 u^2 = 0,$$

$$H_{10} \Delta_{\vec{r}_0} h + F_{10\tau} u + F_{10} u_\tau = 0. \quad (80)$$

В области  $|\vec{r}_1| \gg \delta$ :

$$u_0 F_{1\tau} + h_0 \Delta_1 H_1 = 0, \quad h_0 H_{1\tau} - \delta^2 u_0 \Delta_1 F_1 = 0. \quad (81)$$

В этих уравнениях опущены члены порядка  $O(\delta)$ .

Первое уравнение в (80) имеет такую же структуру, как и (46), с тем отличием, что коэффициенты уравнения зависят от времени. Пару уравнений (81) после замены  $\psi_1 = u_0 \delta F_1, \psi_2 = h_0 H_1$  можно записать в виде уравнения Шредингера для свободной частицы:

$$i\psi_\tau = -\delta \Delta_1 \psi = 0, \quad \psi = \psi_1 + i\psi_2. \quad (82)$$

Сформулируем кратко итог вычислений.

1. Форма частиц описывается первым уравнением в (80).

2. Поступательное движение частиц вдоль оси  $X$  описывается решением  $\psi = Ae^{i\xi}$ ,  $\xi = x - \delta\tau$ . В системе координат, двигающейся вместе с частицей, получаем  $F_{10} \approx F_1(\xi), H_{10} = H_1(\xi)$ , где  $\xi = \text{const}$ . Отсюда следует, что при движении с постоянной скоростью с точностью  $O(\delta)$  форма частицы не изменяется, причем  $h = 0$ .

3. Ускоренные или колебательные движения частицы изменяют ее форму.

4. В том случае, когда параметр  $\delta$  не является малым, движение частицы описывается уравнением (49). В этом случае частицы испытывают продольное сжатие.

5. В трехслойных жидкостях частицы движутся с постоянными скоростями.

## ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

Подведем краткий итог проведенным исследованиям.

1. Предложена регулярная методика нелинейного анализа динамики поляризующихся либо заряженных свободных поверхностей в длинноволновом приближении, основанного на использовании преобразования Фурье (раздел 3).

2. Дополнена теория конусов Тейлора (подраздел 4.4).

3. Произведен анализ динамики трехслойных горизонтальных слоев в гравитационном поле как поляризующихся, так и заряженных поверх-



ностей раздела (подраздел 4.6). В частности, исследован нелинейный аналог ЭГД-эффекта «мертвой воды».

4. Выявлена математическая аналогия между локализованными деформациями свободных поверхностей с гидродинамическими солитонами и квантово-механическими микрочастицами (раздел 5).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шикин В.Б. *УФН*. 2011, **181**(120), 1241–1264.
2. Жакин А.И. *УФН*. 2013, **183**(2), 153–177.
3. Reneker D.H., Yarin A.L., E. Zussman E. and Xu H. *Adv Appl Mech*. 2007, **41**, 43–197.
4. Barrero F., Loscertales I.G. *Annu Rev Fluid Mech*. 2007, **39**, 89–106.
5. Сретенский Л.Н. *Теория волновых движений жидкости*. М.: Наука, 1977, 816 с.
6. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Федоров М.С. *ЖТФ*. 2010, **80**(7), 8–16.
7. Жакин А.И. Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1984, (3), 94–102.
8. Жакин А.И. *Магнитная гидродинамика*. 1983, (4), 41–48.
9. Лейбович С., Сидней А.Р. *Нелинейные волны*. Сборник статей. М.: Мир, 1977. С. 113–150.
10. Taylor G.J. *Proc Roy Soc*. London. 1969, A313, 453–475.
11. Mora J.F. *Annu Rev Fluid Mech*. 2007, **39**, 217–243.
12. Gamero-Castan M. *J Fluid Mech*. 2008, **604**, 339–368.
13. Жакин А.И., Белов П.А. *ЭОМ*. 2013, **49**(2), 52–58.
14. Sugimoto T., Asano K., Higashiyama Y. *J Electrostatics*. 2001, **53**, 25–38.
15. Субботин А.В. *Письма в ЖЭТФ*. 2014, **100**(10), 741–746.
16. Ramos A., Castellanos A. *Phys Lett A*. 1994, **184**, 268–272.
17. Higuera F.J. *J Fluid Mech*. 2003, **484**, 303–327.
18. Higuera F.J. *J Fluid Mech*. 2004, **513**, 339–346.
19. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра*. М.: Наука, 1973. 294 с.
20. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. *Специальные функции*. М.: Наука, 1984. 344 с.
21. Жакин А.И. *Сборник научных трудов V Всероссийской научной конференции «Физико-химические и прикладные проблемы магнитных дисперсных наносистем»*. 14–17 сентября, Ставрополь, Россия, 2015. С. 86–93.
22. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного*. М.: Наука, 1965. 716 с.
23. Жакин А.И. *Физика низких температур*. 1984, **10**(3), 237–248.

Поступила 19.10.15

После доработки 02.12.15

#### Summary

The paper presents the calculation method and main results of both theoretical and experimental investigations of the electric field influence on dielectric liquids with interfaces based on weak nonlinear analyses. It is shown that the local and periodical deformations and nonlinear waves are formed on the interfaces. The influence of the electric intensity on interface is investigated.

*Keywords: liquid dielectric, polarization, conductivity, nonlinear waves, soliton.*