

# Неустойчивость капли по отношению к собственному или поляризационному заряду

\* А. И. Григорьев, С. О. Ширяева, Н. А. Петрушов

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия, \*e-mail: [grig@uniyar.ac.ru](mailto:grig@uniyar.ac.ru)

Изучены закономерности изменения потенциальной энергии осциллирующей сферической и виртуально сфероидальной капли на пороге потери устойчивости по отношению к собственному заряду. Для незаряженной капли в однородном электростатическом поле, в котором она принимает равновесную форму вытянутого по полю сфероида и для которой не существует простого вывода критерия неустойчивости по отношению к поляризационному заряду, предложен математически несложный и физически прозрачный метод оценки критерия по порядку величины, основанный на сравнении потенциальной энергии капиллярных и электростатических сил.

*Ключевые слова:* сферическая капля, заряд, вытянутая сфероидальная капля, однородное электростатическое поле, осцилляции, критические условия устойчивости, потенциальная энергия.

УДК 532.62: 541.24

## ВВЕДЕНИЕ

В конце XIX века лорд Рэлей теоретически строго вывел критерий электростатической неустойчивости заряженной сферической капли [1], который имел вид:

$$W_n \equiv \frac{Q^2}{4\pi\sigma R^3} \geq (n+2),$$

где  $W_n$  – безразмерный параметр (параметр Рэлей), характеризующий устойчивость  $n$ -й моды осцилляций капли по отношению к собственному заряду;  $Q$  и  $R$  – заряд и радиус капли;  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения жидкости. Этот критерий многократно подтверждался экспериментально на каплях разных жидкостей и размеров [2–8]. Изложение расчетов Рэрея было излишне компактно, но интересовало многих, и в середине XX века его расчеты были повторены более подробно [9]. И тем не менее, с физической точки зрения, в изложении этой проблемы остались лакуны.

В частности, известно [10], что в жидкости всегда существует тепловое капиллярное волновое движение и имеет место искажение равновесной поверхности жидкости волнами весьма малой амплитуды:  $\xi \sim \sqrt{\kappa T / \sigma}$ , где  $\kappa$  – постоянная Больцмана;  $T$  – абсолютная температура. Строго говоря, такие волны можно считать бесконечно малыми, так как в рамках модели сплошной среды их амплитуда меньше размеров молекулы, а порождаются они уже тепловым движением молекул жидкости.

При определенных внешних условиях (при достаточно большом заряде капли, как говорят,

«критическом») некоторые моды тепловых волн становятся неустойчивыми: их амплитуда начинает неограниченно нарастать во времени. Вопрос в том: почему существует критический заряд, свой для каждой моды? Что происходит с потенциальной энергией системы на пороге потери устойчивости? В [1, 9] ответы на эти вопросы подразумеваются, но в неявной форме, и их целесообразно изложить детальнее в общепринятых терминах, так как подход, использованный в [1, 9], строг математически, но не изобилует физическими деталями.

## СФЕРИЧЕСКАЯ ЗАРЯЖЕННАЯ КАПЛЯ

Пусть сферическая капля радиуса  $R$  с коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$  несет заряд  $Q$ . Температура капли и окружающей среды постоянна, и объем жидкой фазы не меняется. В соответствии с вышесказанным равновесная сферическая поверхность жидкости возмущена капиллярным волновым движением тепловой природы. В сферической системе координат с началом в центре масс капли уравнение границы раздела сред, возмущенной осесимметричными капиллярными осцилляциями, будет иметь вид:

$$r = R + \xi(\theta, t), \quad |\xi| \ll R,$$

где  $\theta$  – угол между осью симметрии и радиус-вектором точки на поверхности капли в сферической системе координат с началом в центре сферы.

Будем решать задачу об устойчивости такой капли. Представим уравнение поверхности капли в виде:

$$r = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(\cos \theta), \quad (1)$$

где  $r$  – расстояние от начала координат до поверхности;  $a_n \ll a_0 \forall n$ ,  $P_n(\cos \theta)$  – полиномы Лежандра;  $a_n$  – постоянные коэффициенты, имеющие смысл амплитуд капиллярных волн. Отношения  $a_n/a_0$  весьма малы ( $|a_n/a_0| \ll 1$ ) и убывают с увеличением номера моды  $n$  так, что  $|a_n/a_{n+1}| > 1$ . Как показано в [9], в принятых обозначениях радиус равновесной сферической капли  $R$  можно выразить через амплитуды капиллярных волн  $a_n$  в виде:

$$R \approx a_0 \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)^{-1} \left( \frac{a_n}{a_0} \right)^2 \right].$$

Площадь возмущенной поверхности капли при этом примет вид:

$$S = 4\pi \cdot R^2 + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)(n+2)(2n+1)^{-1} \cdot a_n^2.$$

Потенциальная энергия сил поверхностного натяжения рассматриваемой системы (потенциальная энергия, связанная с возмущением поверхности капли капиллярными осцилляциями) равна произведению коэффициента поверхностного натяжения на приращение площади реальной поверхности капли по сравнению с площадью сферы (то есть если за ноль потенциальной энергии выбрать потенциальную энергию сферы). Если  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения, то потенциальная энергия сил поверхностного натяжения, отсчитываемая от потенциальной энергии капиллярных сил равновесной сферы, равна:

$$U_{\sigma} = 2\pi\sigma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)(n+2)}{(2n+1)} a_n^2. \quad (2)$$

Электрический потенциал капли имеет вид (с сохранением слагаемых второго порядка малости):

$$\Phi \approx \frac{Q}{R} - \frac{Q}{R^3} \sum_n \frac{(n-1)}{(2n+1)} a_n^2.$$

Электростатическая потенциальная энергия капли определяется известной формулой:

$$U_Q = Q\Phi / 2.$$

Если за нулевой уровень отсчета энергии принять электростатическую энергию равновесной сферы, то можно получить соотношение:

$$U_Q = -\frac{Q^2}{2R^3} \sum_n \frac{(n-1)}{(2n+1)} a_n^2. \quad (3)$$

Знак «минус» в (3) показывает, что электростатические силы противодействуют силам поверхностного натяжения.

Обозначим приращение полной потенциальной энергии капли при ее деформации через  $\Delta U$ . Отметим, что возможны три варианта численного значения величины:  $\Delta U < 0$  (усиление деформации энергетически выгодно системе, так как ее полная потенциальная энергия при этом уменьшается, капля неустойчива),  $\Delta U > 0$  (увеличение деформации энергетически невыгодно системе, так как ее полная потенциальная энергия при этом увеличивается, капля устойчива),  $\Delta U = 0$  разделяет эти два крайних состояния (режим безразличного равновесия).

Найдем сумму (2) и (3), что даст  $\Delta U$ , и приравняем  $\Delta U$  нулю, чтобы найти положение системы, при смещении от которого она свалится к одному из крайних режимов:

$$\Delta U \equiv 2\pi\sigma \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)(n+2)}{(2n+1)} a_n^2 - \frac{Q^2}{2R^3} \sum_n \frac{(n-1)}{(2n+1)} a_n^2 = 0.$$

Это выражение можно перегруппировать, приведя к виду:

$$\Delta U \equiv 2\pi\sigma \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)}{(2n+1)} [(n+2) - W_n] a_n^2 = 0. \quad (4)$$

Поскольку ряд (4) знакостоянный, то его равенство нулю означает, что равны нулю все члены ряда, а это может иметь место только тогда, когда для всех  $n$  равно нулю выражение, стоящее в квадратных скобках:

$$W_n - (n+2) = 0. \quad (5)$$

Из сказанного выше и из условия (5) критерий реализации неустойчивости  $n$ -й моды осцилляций капли примет вид:

$$W_n \geq (n+2), \quad (6)$$

что совпадает с полученным Рэлеем [1].

Прежде всего отметим, что, как видно из (2), при принятом бесконечно малом возмущении, связанном с любой модой осцилляций (поскольку согласно приведенному выше, моды не взаимодействуют между собой) или со всеми модами сразу, потенциальная энергия сил поверхностного натяжения только увеличивается, а потенциальная энергия заряда капли (3) только уменьшается. Если увеличение потенциальной энергии, вызванное возмущением поверхности капли и связанное с силами поверхностного натяжения, меньше ее уменьшения (по абсолютной величине), связанного с электрическим полем собственного заряда, то общая потенциальная энергия уменьшится и капля претерпит неустойчивость. Чтобы найти условия реализации неустойчивости, нужно определить величину собственного заряда  $Q$ , при котором изменение электростатической свободной энергии по абсолютной

величине превысило изменение свободной энергии капиллярных сил. Именно это и было сделано выше, но в безразмерном виде, объединило в одном безразмерном параметре  $W$  заряд капли  $Q$  с ее радиусом  $R$  и с коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$ , чтобы охватить все возможные заряды, размеры капель и виды жидкостей с различными коэффициентами поверхностного натяжения.

Проиллюстрируем вышесказанное прямыми расчетами для основной моды:  $n = 2$ . Примем для качественных расчетов (хотя это далеко от действительности), что  $\alpha_2$  изменяется от 0 до 0,1. Тогда в безразмерных переменных, в которых  $R = \sigma = \rho = 1$  (2) и (3) и безразмерный параметр  $W$  будут выглядеть как

$$U_\sigma = \frac{8\pi}{5} a_2^2; \quad U_Q = -\frac{2\pi W}{5} a_2^2; \quad W \equiv \frac{Q^2}{4\pi}. \quad (7)$$

На рис. 1 приведены результаты расчета по (7). Видно, что две поверхности  $U_\sigma(a_2)$  (редкая сетка) и  $U_Q(W, a_2)$  (частая сетка) пересекаются при  $W = 4$  при любых значениях амплитуды  $a_2$ .

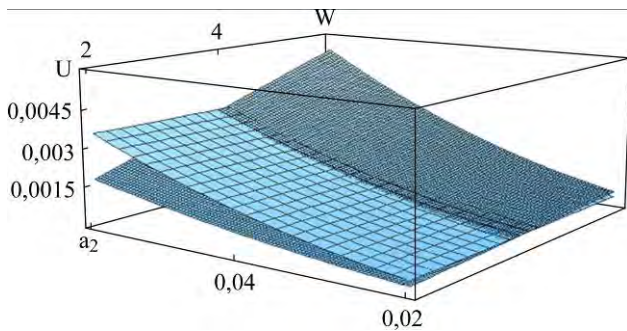


Рис. 1. Потенциальная энергия сил поверхностного натяжения  $U_\sigma(a_2)$  (редкая сетка) и потенциальная энергия собственного заряда  $U_Q(W, a_2)$  (частая сетка).

То же самое продемонстрируем на примере деформации заряженной капли к сфероидальной форме. Известно [11–13], что в линейном приближении по величине деформации капли, пропорциональной второму полиному Лежандра, она принимает сфероидальную форму. При этом величину деформации  $\zeta$  (степень отклонения от сферической формы) можно связать в линейном приближении по  $\zeta$  с квадратом эксцентриситета соотношением:  $e^2 \approx \beta \cdot \zeta$  (более точное выражение для связи  $e^2$  с величиной сфероидальной деформации приведено в «Приложении»).

Следует отметить, что вторая мода имеет минимальный среди всех мод порог потери устойчивости и первой среди них претерпевает неустойчивость по отношению к собственному заряду при повышении последнего. Это, в частности, означает, что при потере устойчивости капля деформируется к вытянутому сфероиду.

## СФЕРОИДАЛЬНАЯ ЗАРЯЖЕННАЯ КАПЛЯ

Пусть теперь виртуальным образом в результате действия сил неэлектрической природы капля приняла форму вытянутого сфероида. Энергия сил поверхностного натяжения капли при сфероидальной деформации (если за нулевой уровень принимать энергию сил поверхностного натяжения сферической капли) будет иметь вид:

$$U_\sigma = 2\pi R^2 \sigma \left[ (1-e^2)^{1/3} \left( 1 + \frac{\arcsin e}{e(1-e^2)^{1/2}} \right) - 2 \right]. \quad (8)$$

На рис. 2а эта поверхность нанесена в безразмерных переменных, в которых  $R = \sigma = \rho = 1$ .

Поместим теперь на каплю электрический заряд  $Q$ . Свободная энергия при этом изменится (если за нулевой уровень принимать электростатическую энергию сферической капли):

$$U_Q = -\frac{Q^2}{4R} \left[ \frac{(1-e^2)^{1/3}}{e} \cdot \ln \frac{1+e}{1-e} - 2 \right]. \quad (9)$$

На рис. 2б эта поверхность нанесена в указанных безразмерных переменных.

Найдем сумму (8) и (9) и приравняем ее нулю. В тех же безразмерных переменных она примет вид:

$$\Delta U = \left[ (1-e^2)^{1/3} \left( 1 + \frac{\arcsin e}{e(1-e^2)^{1/2}} \right) - 2 \right] - \frac{W}{2} \left[ \frac{(1-e^2)^{1/3}}{e} \cdot \ln \frac{1+e}{1-e} - 2 \right] = 0, \quad (10)$$

где параметр  $W$  определяется выражением (7) (или (4)). Поверхности (8) и (9) пересекаются при  $W = 4$ , как и на рис. 1.

Интересно отметить, что при  $e \ll 1$  можно записать:

$$U_\sigma = 2\pi R^2 \sigma \left[ (1-e^2)^{1/3} \left( 1 + \frac{\arcsin e}{e(1-e^2)^{1/2}} \right) - 2 \right] \approx \frac{8}{45} \pi R^2 \sigma e^4 + O[e^6]; \quad (11)$$

$$U_Q = -\frac{Q^2}{4R} \left[ \frac{(1-e^2)^{1/3}}{e} \cdot \ln \frac{1+e}{1-e} - 2 \right] \approx -\frac{Q^2 e^4}{90R} + O[e^6]. \quad (12)$$

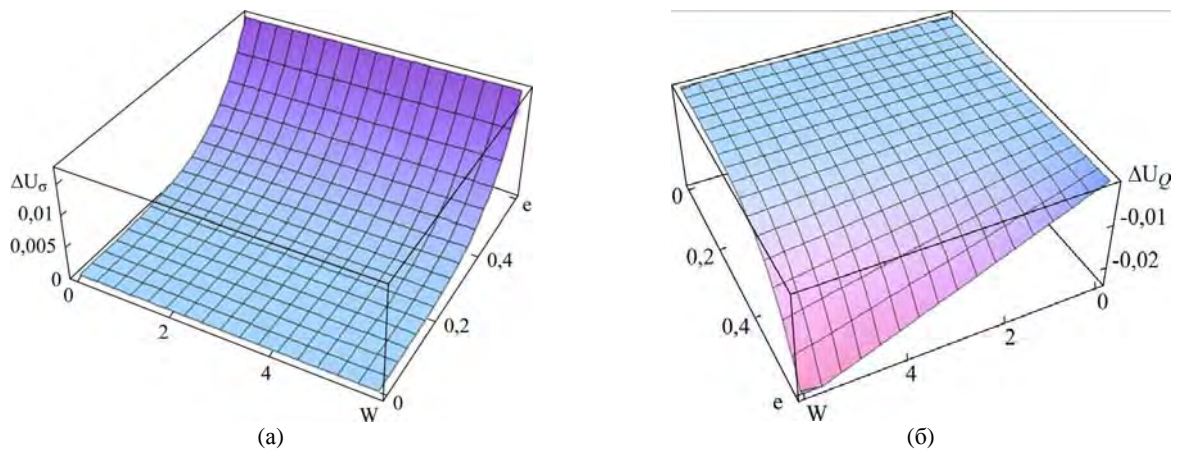
Суммируя (11) и (12), получаем:

$$\left( \frac{Q^2}{4\pi R^3 \sigma} - 4 \right) e^4 + O(e^6) = 0$$

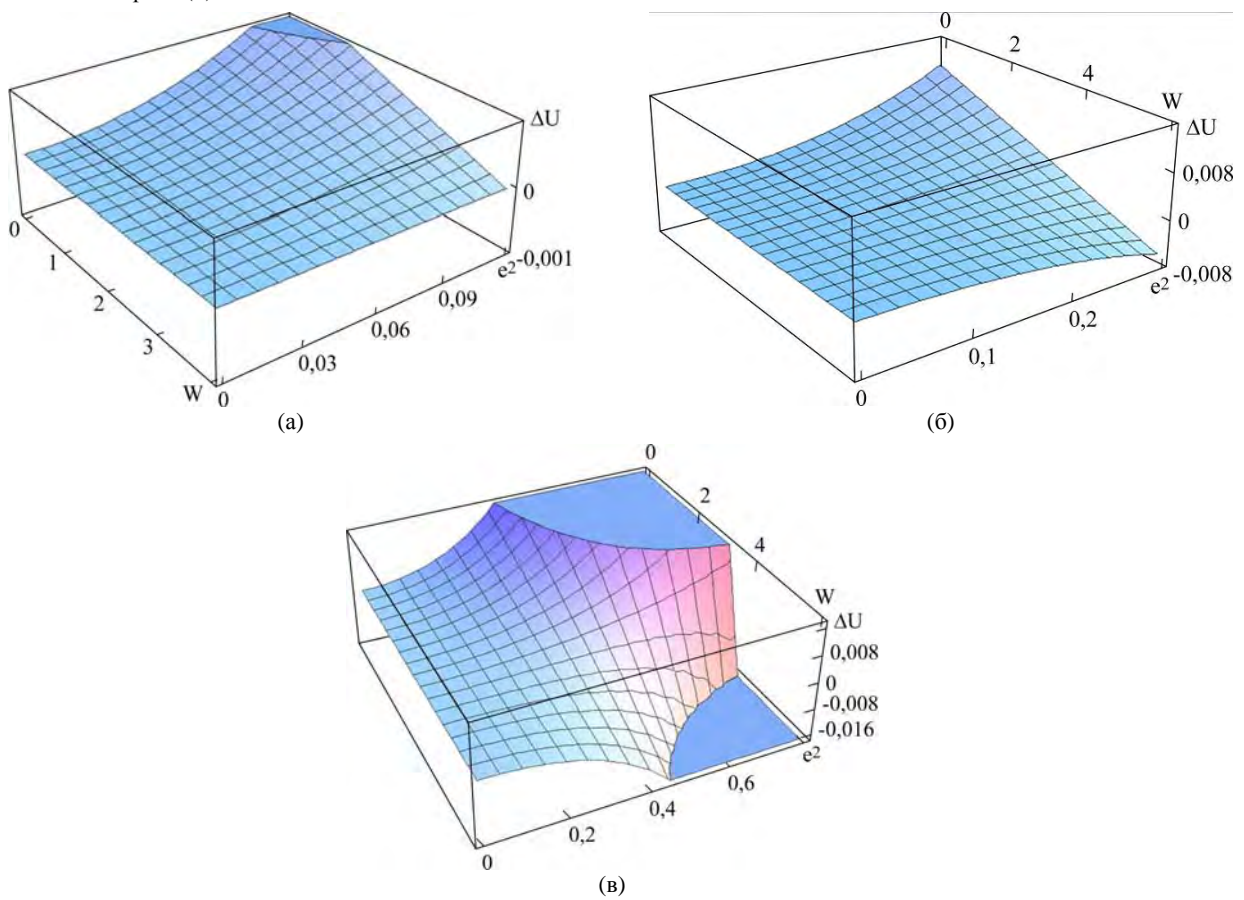
или в указанных выше безразмерных переменных с точностью до  $e^6$  получим:  $W_2 = 4$ .

Итак, при  $W < 4$  и сфероидальных деформациях заряженной капли ее полная потенциальная

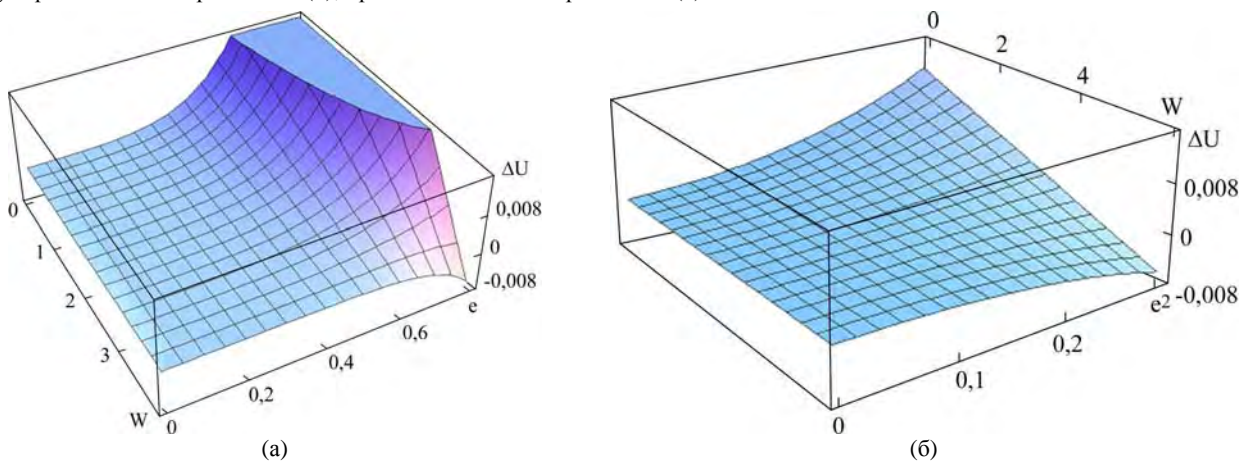




**Рис. 2.** Приращение безразмерной потенциальной капиллярной энергии (а) и безразмерной потенциальной энергии собственного заряда (б).



**Рис. 3.** Приращение полной безразмерной потенциальной энергии сфероидальной капли: при малых эксцентриситетах (а); при умеренных эксцентриситетах (б); при больших эксцентриситетах (в).



**Рис. 4.** Поверхность  $\Delta U(e, W)$  в диапазоне значений  $W \leq 4$  и  $e \leq 0,8$  (а); при меньших значениях эксцентриситета (б).

энергия увеличивается, и капля возвращается в исходное состояние. При  $W > 4$  полная потенциальная энергия уменьшается, и капля претерпевает неустойчивость.

На рис. 3а–в приведена зависимость (10) в виде  $\Delta U = \Delta U(e, W)$ . Из рис. 3а видно, что при  $W < 4$  и малых значениях эксцентриситета капля устойчива: поскольку функция  $\Delta U(e, W)$  остается положительной и увеличивается по абсолютной величине. При  $W > 4$  функция  $\Delta U(e, W)$  переходит в область отрицательных значений при конечных значениях  $e$ , следовательно, капля претерпевает неустойчивость (см. рис. 3б–в).

На рис. 4а приведен график той же самой функции  $\Delta U(e, W)$  в диапазоне значений  $W \leq 4$  и  $e \leq 0,8$ . На рис. 4б тот же график приведен при меньших значениях эксцентриситета. Согласно сказанному выше, при  $W < 4$  капля должна быть устойчива. Как видно из рис. 4, в реальности при больших сфероидальных деформациях капля теряет устойчивость скорее при меньшем заряде на капле (при  $W \leq 4$ ), чем при малых деформациях.

#### СФЕРОИДАЛЬНАЯ КАПЛЯ В ОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Пусть теперь незаряженная капля находится в однородном электростатическом поле напряженностью  $\vec{E}_0$ . Хорошо известно [11], что незаряженная капля в этом поле приобретает вытянутую вдоль поля сфероидальную форму.

Электростатическую потенциальную энергию капли в поле  $\vec{E}_0$  запишем в виде:

$$U_E = -E_0^2 \frac{e^3}{8\pi(1-e^2)(\text{Arth } e - e)} V \equiv \\ \equiv -E_0^2 \frac{R^3 e^3}{6(1-e^2)(\text{Arth } e - e)},$$

где  $V$  – неизменный в модели несжимаемой жидкости объем капли. Видно, что с увеличением  $E_0$  (или  $e$ ) величина  $U_E$  снижается.

При  $e \ll 1$ , если потенциальную энергию незаряженной капли в поле отсчитывать от равновесного вытянутого сфероида, можно записать:

$$\Delta U_E = -E_0^2 R^3 \frac{e^3}{6(1-e^2)(\text{Arth } e - e)} \approx \\ \approx -\frac{29}{175} E_0^2 R^3 e^4 + O(e^6). \quad (13)$$

Качественно это приращение аналогично приведенному на рис. 2б.

Суммируя (11) и (13), получим:

$$\frac{29}{175} E_0^2 R^3 e^4 - \frac{8}{45} \pi R^2 \sigma e^4 = 0.$$

Или

$$\left( \frac{E_0^2 R}{\sigma} - \frac{8 \cdot 35}{9 \cdot 29} \pi \right) e^4 \equiv \left( w - \frac{280}{261} \pi \right) e^4 = 0.$$

Откуда с точностью до  $e^6$  следует, что  $w \approx 3,368$ . Результат получается близким к истинному  $w \approx 2,62$  (относительная погрешность  $\approx 0,3$  по сравнению с истинным), полученному экспериментально и численным расчетом в [14]. Найденное выше значение параметра  $w$  совпадает с истинным по порядку величины, но его достоинством является то, что оно получено в простой, не требующей затрат времени и денег математической процедуре в отличие от [12, 14, 15].

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведен анализ физических закономерностей реализации электростатической неустойчивости заряженной сферической и сфероидальных капель или незаряженной капли во внешнем однородном электростатическом поле, исходя из представлений о минимизации свободной энергии конечного состояния.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ.

#### СВЯЗЬ МЕЖДУ КВАДРАТОМ ЭКСЦЕНТРИСИТЕТА И АМПЛИТУДОЙ СФЕРОИДАЛЬНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

По определению эксцентриситета имеем:

$$1 - 0,5 \cdot \zeta e^2 = 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \equiv 1 - \left( \frac{1 - 0,5 \cdot \zeta}{1 + \zeta} \right)^2 \approx \\ e \approx 3, \zeta - 5, 25 \zeta^2 + 7, 5 \zeta^3 - 9, 75 \zeta^4 + O[\zeta^5].$$

Учтено, что вытянутый сфероид в линейном приближении по  $e^2$  пропорционален второму полиному Лежандра и меньшая полуось сфероида выражается через амплитуду деформации  $\sim P_2(\cos \vartheta)$  как  $b \equiv 1 - 0,5 \cdot \zeta$ , а большая – как  $a \equiv 1 + \zeta$ .

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 14-01-00170-а и 14-08-00240-а.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Rayleigh (Strutt J.W.) *Phil. Mag.* 1882, 14, 184–186.
2. Doyle A., Moffet D.R., Vonnegut B. *J Colloid Sci.* 1964, 19, 136–143.
3. Berg T.G.O., Trainor R.J., Vaughan U. *J Atmosph Sci.* 1970, 27(11), 1173–1181.
4. Schweizer J.D., Hanson D.N. *J Colloid Interf Sci.* 1971, 35(3), 417–423.
5. Roulleau M., Desbois M. *J Atmosph Sci.* 1972, 29(4), 565–569.
6. Duft D., Lebbeus H., Huber B.A. *Phys Rev Lett.* 2002, 89(8), 1–4.

7. Duft D., Achtzehn T., Muller R., et al. *Nature*. 2003, **421**, 128.
8. Grimm R.L., Beauchamp J.L. *J Phys Chem B*. 2005, **109**, 8244–8250.
9. Hendrics C.D., Schneider J.M. *Amer J Phys*. 1963, **31**, 450–453.
10. Френкель Я.И. *ЖЭТФ*. 1936, **6**(4), 348–350.
11. O' Konski C.J., Thacher H.C. *J Phys Chem* 1953, **57**, 955–958.
12. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белавина Е.И. *ЖТФ*. 1989, **59**(6), 27–34.
13. Григорьев А.И. *ЖТФ*. 1986, **56**(7), 1272–1278.
14. Taylor G.I. *Proc Roy Soc London*. 1964, **A280**, 383–397.
15. Григорьев А.И., Синкевич О.А. *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1985, (6), 10–15.

*Поступила 11.01.15  
После доработки 23.02.15*

### **Summary**

Regularities of a change of a potential energy of an oscillating, spherical, and virtually spheroidal drop on a threshold of a loss of stability in relation to its own charge are studied. A simple and physically transparent mathematical method is proposed for the assessment of the criterion on the order of the size based on the comparison of the potential energy of capillary and electrostatic forces for an uncharged drop in a uniform electrostatic field in which it takes the equilibrium form extended across the field of a spheroid for which there is no simple conclusion of criterion of instability in relation to a polarizing charge.

*Keywords: spherical drop, charge, extended spheroidal drop, uniform electrostatic field, oscillation, emergency conditions of stability, potential energy.*