

Внутренние волны в двухслойной жидкости конечной толщины с заряженной границей раздела

В. Д. Труфанов, М. С. Фёдоров, С. О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия, e-mail: yardemid@mail.ru

Исследуются внутренние волны несмешивающихся жидкостей конечной толщины заряженной границы раздела. Показано, что параметры волн зависят от толщины слоев.

Ключевые слова: стратифицированная жидкость, капиллярно-гравитационные волны, идеальная жидкость.

УДК 532.5

ВВЕДЕНИЕ

Исследование внутренних и внешних (свободных) волн в слоисто-неоднородной жидкости представляет как академический интерес для физики и механики, так и чисто практический [1–4], а также для микроэлектроники в связи с обнаружением капиллярного аналога эффекта «мертвой воды» [5–6] и в связи с возобновившимися экспериментами на эту тему [7]. Внешние (свободные) волны тщательно исследованы в различных приближениях [1–3, 8–13]. В последующем изложении сконцентрируемся на свойствах внутренних волн (волн, порождаемых гравитационными либо капиллярными силами на границе раздела сред). Для общности изложения рассмотрим волны на заряженной границе раздела двух несмешивающихся жидкостях, ограниченных сверху и снизу твердыми поверхностями (имея в виду возможную экстраполяцию в капиллярную область).

ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Будем решать задачу о волнах на заряженной поверхности раздела $z = \xi(x, t)$ двух идеальных несжимаемых ограниченных жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2 , где первая жидкость является идеальным проводником, а вторая – идеальным диэлектриком, σ – коэффициент поверхностного натяжения границы раздела. Система находится в поле силы тяжести \vec{g} и в электрическом поле \vec{E}_0 , создаваемом разностью потенциалов между стенками, ограничивающими первую и вторую жидкости, и образующем поверхностный электрический заряд на поверхности раздела. Определим систему координат так, что ось ox лежит на невозмущенной поверхности раздела двух жидкостей (рис. 1).

Математическая формулировка задачи состоит из уравнений Эйлера, уравнений неразрывности для двух сред и гидродинамических граничных условий:

$$\partial_t \vec{U}_j(\vec{r}, t) + (\vec{U}_j(\vec{r}, t), \nabla) \vec{U}_j(\vec{r}, t) = -\frac{1}{\rho_j} \nabla P_j(\vec{r}, t) + \vec{g};$$

$$\operatorname{div} \vec{U}_j(\vec{r}, t) = 0; \quad j = 1, 2,$$

$$y\Psi(\vec{r}, t) = 0,$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\nabla\Psi(\vec{r}, t),$$

$$z = \xi(x, t): (\vec{n}, \vec{U}_1(\vec{r}, t)) = (\vec{n}, \vec{U}_2(\vec{r}, t));$$

$$P_1(\vec{r}, t) - P_2(\vec{r}, t) = P_\sigma(\vec{r}, t) - P_E(\vec{r}, t); \quad (1)$$

$$F(x, z, t) = 0:$$

$$\frac{\partial F(\vec{r}, t)}{\partial t} + (\vec{U}_2(\vec{r}, t), \nabla) F(\vec{r}, t) = 0; \quad (2)$$

$$z = -a: (\vec{n}, \vec{U}_1(\vec{r}, t)) = 0; \quad (3)$$

$$z = b: (\vec{n}, \vec{U}_2(\vec{r}, t)) = 0. \quad (4)$$

$$z = b: \Psi_0 = V; \quad z = \xi: \Psi_0 = \Psi_S, \quad (5)$$

где $\vec{U}_j(\vec{r}, t)$ – поля скоростей в верхней и нижней жидкостях; $P_1(\vec{r}, t), P_2(\vec{r}, t)$ – гидродинамические давления в нижней и верхней жидкостях; Ψ – электростатический потенциал верхнего слоя жидкости; P_σ и P_E – капиллярное и электростатическое давления на границе раздела сред; \vec{n} – единичный вектор нормали к границе раздела сред, функция $F(x, z, t) \equiv z - \xi(x, t)$ определяет уравнение границы раздела жидкости $F(x, z, t) = 0$; $\xi(x, t)$ – возмущение границы раздела сред, соответственно амплитуда $|\xi_2| \ll h$ принимается в качестве малого параметра задачи.

СКАЛЯРИЗАЦИЯ

Капиллярность колебаний поверхности раздела позволяет нам считать движение жидкостей потенциальным, и мы можем воспользоваться моделью потенциального течения жидкости. Для этого введем скалярные потенциалы полей ско-

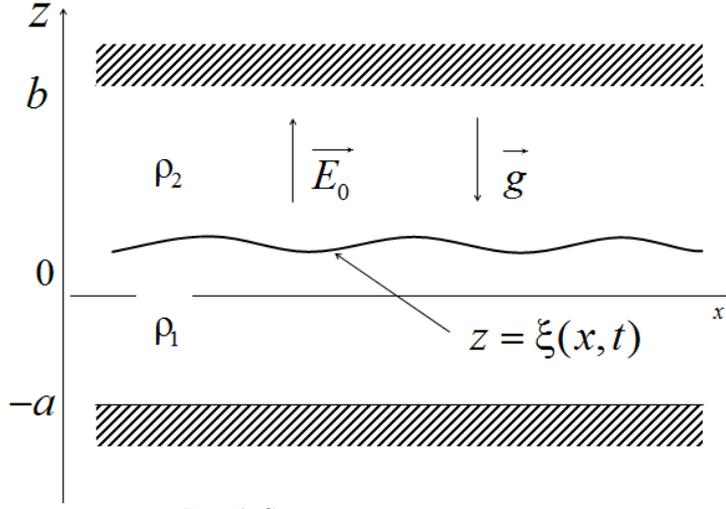


Рис. 1. Схематический вид системы.

ростей Φ_1 для нижней жидкости и Φ_2 для верхней жидкости:

$$\vec{U}_j(\vec{r}, t) = \nabla \Phi_j(\vec{r}, t); \quad j=1; 2.$$

Решение сформулированной задачи находим в виде $\vec{U}_j(\vec{r}, t) = \nabla \Phi_j(\vec{r}, t)$. Поскольку движения обеих жидкостей вызваны малыми колебаниями их граничных поверхностей, то примем, что в безразмерных переменных (например, $\rho_1 = h = \sigma = 1$) потенциалы $\Phi_j(\vec{r}, t)$ имеют тот же порядок малости, что и амплитуды волн: $|\Phi_j| \sim |\xi| \sim \varepsilon$, где $\varepsilon \equiv \zeta \cdot k$ – безразмерная амплитуда начальной деформации, которую примем в качестве малого параметра задачи. Будем искать решение в виде асимптотических разложений:

$$\begin{aligned} P_j &\approx P_j^{(0)} + \varepsilon P_j^{(1)} + \dots; \\ P_\sigma &\approx P_\sigma^{(0)} + \varepsilon P_\sigma^{(1)} + \dots; \\ P_{jE} &\approx P_{jE}^{(0)} + \varepsilon P_{jE}^{(1)} + \dots; \\ \Phi_j(x, z, t) &\approx \Phi_j^{(0)}(z) + \varepsilon \Phi_j^{(1)}(x, z, t) + \dots; \\ \Psi(x, z, t) &\approx \Psi^{(0)}(z) + \varepsilon \Psi^{(1)}(x, z, t) + \dots; \\ \xi(x, t) &\approx \varepsilon \xi^{(1)}(x, t) + \dots; \quad (j=1; 2), \end{aligned} \quad (6)$$

где верхний индекс означает порядок малости соответствующей компоненты: нулём помечены равновесные значения на поверхности, не связанные с возмущением, а единицей – величины первого порядка малости.

Подставив разложения (6) в уравнения Эйлера и уравнения неразрывности жидкости для двух сред, получим систему скалярных уравнений:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_j = 0; \quad P_j = P_j^{(0)} - \rho_j (\partial_t \Phi_j + gz) \\ (j=1; 2). \end{aligned} \quad (7)$$

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ДАВЛЕНИЕ

Для определения давления электрического поля на границу раздела сред воспользуемся общим выражением для электростатического давления:

$$P_E = \frac{E^2}{8\pi}; \quad \vec{E} = -\nabla \Psi; \quad E_0 = 4\pi \varepsilon_0.$$

Подставив разложения для электростатических потенциалов (6) в граничные условия (5), получим систему уравнений относительно компонент электростатических потенциалов нулевого и первого порядков малости (так как задача решается в линейном по ξ приближении):

$$\begin{aligned} z = b: \quad \Psi^{(0)} + \Psi^{(1)} = V; \quad z = 0: \\ \Psi^{(0)} + \xi \partial_z \Psi^{(0)} + \Psi^{(1)} = \Psi_s^{(0)} + \Psi_s^{(1)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Далее находим электростатические потенциалы нулевого порядка малости из уравнения Лапласа и граничных условий (5):

$$\begin{aligned} \Delta \Psi^{(0)} = 0; \quad \Psi^{(0)} = C_1 z + C_0; \\ \Psi^{(0)} \Big|_{z=b} = V; \quad C_1 b + C_0 = V; \\ \Psi^{(0)} \Big|_{z=0} = \Psi_s^{(0)}; \quad C_0 = \Psi_s^{(0)}. \end{aligned}$$

Так как потенциал определяется с точностью до произвольной функции времени, примем $\Psi_s^{(0)}(z)$ равным нулю. В конечном результате электростатический потенциал нулевого порядка малости имеет вид:

$$\Psi^{(0)}(z) = \frac{V}{b} z. \quad (9)$$

Решение уравнения Лапласа для электростатического потенциала $\Psi^{(1)}(x, z, t)$ будем искать в виде плоских бегущих волн:

$$\Psi^{(1)}(x, z, t) = A(t) \exp(ikx) [B_1 \exp(kx) + B_2 \exp(-kz)].$$

Учитывая граничное условие (8) на верхней стенке, электростатический потенциал примет вид:

$$\Psi^{(1)}(x, z, t) = A(t) \exp(ikx) B \operatorname{sh}(k(z-b)). \quad (10)$$

При подстановке (10) во второе граничное условие (8), принимая во внимание, что волны, бегущие по поверхности раздела жидкостей, имеют гармонический характер:

$$\xi = \zeta \exp[i(kx - \omega t)],$$

получим константу $A(t)$ и конечный вид электростатического потенциала $\Psi^{(1)}(x, z, t)$:

$$A(t) = -\frac{V\zeta \exp(-i\omega t)}{bB \operatorname{sh}(-kb)};$$

$$\Psi^{(1)}(x, z, t) = -\frac{V}{b} \zeta \frac{\operatorname{sh}[k(z-b)]}{b \operatorname{sh}(-kb)} \exp[i(kx - \omega t)]. \quad (11)$$

Теперь, зная (9) и (10), можем выписать электростатические давления нулевого и первого порядков малости:

$$z=0: \quad P_E^{(0)} = \frac{V^2}{8\pi b^2};$$

$$P_E^{(1)} = \frac{V^2}{4\pi b^2} k\zeta \operatorname{cth}(-kb) \exp[i(kx - \omega t)]. \quad (12)$$

Для определения капиллярного давления на границу раздела и свободную поверхность жидкости удобно воспользоваться известным выражением

$$P_\sigma = \sigma \operatorname{div} \vec{n};$$

где вектор нормали определяется как

$$\vec{n} = \frac{\nabla F(x, y, z)}{|\nabla F(x, y, z)|} \Big|_{F(x, y, z)=0}.$$

Используя введенные выше выражения для функций $F(x, z, t)$, несложно получить $\vec{n} = \vec{e}_z \left(1 - \frac{1}{2} (\partial_x \xi)^2\right) - \vec{e}_x \partial_x \xi$. Тогда компоненты капиллярных давлений могут быть представлены через возмущения границы раздела в следующем виде:

$$P_\sigma^{(0)} = 0; \quad P_\sigma^{(1)} = -\sigma \partial_{xx} \xi^{(1)}. \quad (13)$$

ЗАДАЧИ НУЛЕВОГО И ПЕРВОГО ПОРЯДКОВ МАЛОСТИ

В нулевом порядке малости получим распределение для давлений в равновесном состоянии:

$$z=0: \quad f_1^{(0)} - f_2^{(0)} + \frac{V^2}{8\pi b^2} = 0.$$

Здесь $f_1^{(0)}, f_2^{(0)}$ – константы интегрирования уравнений Эйлера.

Подставив найденные выражения для гидродинамических (7), электростатического (12) и капиллярного (13) давлений в систему граничных условий (1) и (2), получим задачу первого порядка малости (далее все идет без индексов порядков малости, так как он везде один):

$$z=0: \quad \partial_z \Phi_1 = \partial_z \Phi_2; \quad \partial_z \Phi_1 = \partial_t \xi;$$

$$\rho_1 \partial_t \Phi_1 + \rho_1 g \xi - \rho_2 \partial_t \Phi_2 - \rho_2 g \xi - \sigma \partial_{xx} \xi^{(1)} = \frac{V^2}{4\pi b^2} k\zeta \operatorname{cth}(-kb) \exp[i(kx - \omega t)]. \quad (14)$$

Используя ту же самую процедуру для отыскания электростатических потенциалов, найдем гидродинамические потенциалы:

$$\Phi_1 = A(t) \exp(ikx) B_1 \operatorname{ch}[k(z+a)]; \quad (15)$$

$$\Phi_2 = A(t) \exp(ikx) B_2 \operatorname{ch}[k(z-b)]. \quad (16)$$

При подстановке гидродинамического потенциала Φ_1 (15) во второе кинематическое условие (14) найдем константу $A(t)$:

$$A(t) = -\frac{i\omega \xi}{kB_1 \operatorname{sh}(ka)} \exp(-i\omega t). \quad (17)$$

При подстановке (17) в (15) и после некоторых преобразований получим конечный вид гидродинамического потенциала $\Phi_1(x, z, t)$:

$$\Phi_1 = -\frac{i\omega}{k} \zeta \frac{\operatorname{ch}[k(z+a)]}{\operatorname{sh}(ka)} \exp[i(kx - \omega t)]. \quad (18)$$

Далее найдем $\Phi_2(x, z, t)$, для чего воспользуемся первым граничным условием (14):

$$\Phi_2 = -\frac{i\omega}{k} \zeta \frac{\operatorname{ch}[k(z-b)]}{\operatorname{sh}(-kb)} \exp[i(kx - \omega t)]. \quad (19)$$

Теперь, зная гидродинамические потенциалы (18) и (19), мы можем вывести дисперсионное уравнение из динамического граничного условия (14). После всех алгебраических преобразований дисперсионное уравнение принимает вид:

$$\begin{aligned} & [\rho_2 \operatorname{cth}(-kb) - \rho_1 \operatorname{cth}(ka)] \omega^2 + \\ & + gk(\rho_1 - \rho_2) + \frac{V^2}{4\pi b^2} k^2 \operatorname{cth}(-kb) + \sigma k^3 = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Для подтверждения правильности всех наших вычислений проверим получившееся дисперсионное уравнение (20) при предельных переходах.

Для общего случая неустойчивости Тонкса-Френкеля (при наличии лишь одной бесконечно глубокой жидкости) дисперсионное уравнение приобретет вид:

$$\omega^2 = \frac{\sigma}{\rho} k^3 + gk - \frac{V^2}{4\pi b^2} \frac{k^2}{\rho}.$$

В этом случае необходимо принять

$$\rho_2 = 0, a \rightarrow \infty, b \rightarrow \infty.$$

Тогда дисперсионное уравнение (20) примет вид:

$$\omega^2 = gk + \frac{\sigma}{\rho_1} k^3 - \frac{E_0^2}{4\pi} \frac{k^2}{\rho_1}.$$

Для общего случая неустойчивости Тейлора (при наличии двух бесконечно глубоких жидкостей, верхняя из которых имеет большую плотность $\rho_2 > \rho_1$) дисперсионное уравнение имеет вид:

$$\omega^2 = \frac{-gk(\rho_2 - \rho_1) + \sigma k^3}{\rho_1 + \rho_2}.$$

В этом случае необходимо принять $V = 0$, $a \rightarrow \infty$, $b \rightarrow \infty$, тогда дисперсионное уравнение (20) запишется:

$$\omega^2 = \frac{-gk(\rho_2 - \rho_1) + \sigma k^3}{\rho_1 + \rho_2}.$$

Как видно, наше дисперсионное уравнение (20) при предельных переходах совпадает с уравнениями неустойчивости Тонкса-Френкеля и Тейлора, что говорит о правильности всех наших вычислений.

АНАЛИЗ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Для дальнейшего исследования дисперсионного уравнения запишем его в следующем виде:

$$\omega^2 = - \frac{gk(\rho_1 - \rho_2) + \frac{V^2}{4\pi b^2} k^2 \operatorname{cth}(-kb) + \sigma k^3}{[\rho_2 \operatorname{cth}(-kb) - \rho_1 \operatorname{cth}(ka)]}. \quad (21)$$

Неустойчивость возникает при отрицательном значении ω^2 (в этом случае $\exp(-i\omega t)$ принимает вещественное значение и экспоненциально возрастает со временем). Из дисперсионного уравнения (21) видно, что для осуществления устойчивых колебаний числитель дроби должен быть

больше нуля (знаменатель всегда положителен). Поэтому будем исследовать функцию $F(k)$:

$$\begin{aligned} F(k) = gk(\rho_1 - \rho_2) + \\ + \frac{V^2}{4\pi b^2} k^2 \operatorname{cth}(-kb) + \sigma k^3. \end{aligned} \quad (22)$$

Используя (22), построим графики функции $F(k)$ при различных глубинах второй жидкости и фиксированной разности потенциалов V . Как видно из рис. 2, при увеличении глубины второй жидкости область неустойчивости быстро уменьшается. Это связано с тем, что при росте расстояния b квадрат напряженности поля $E_0^2 = \frac{V^2}{4\pi b^2}$ уменьшается в b^2 раз, что быстро уменьшает дестабилизирующий вклад напряженности в колебания.

Далее построим графики функции $F(k)$ при различных разностях потенциалов V и фиксированной глубине второй жидкости. Как видно из рис. 3, при увеличении разности потенциалов область неустойчивости быстро увеличивается. Это связано с тем, что при росте разности потенциалов V квадрат напряженности поля $E_0^2 = \frac{V^2}{4\pi b^2}$ увеличивается в V^2 раз, что быстро увеличивает дестабилизирующий вклад напряженности в колебания.

Построим графики функции $F(k)$ при различных ρ_2 и фиксированной напряженности электрического поля $E_0 = -\frac{V}{4\pi b}$. Как видно из рис. 4, при увеличении плотности второй жидкости область неустойчивости возрастает. Это связано с тем, что при росте плотности ρ_2 для длинных волн (малое волновое число k) возрастает дестабилизирующий вклад неустойчивости Тейлора.

Используя (22), построим графики функции $\omega^2(a)$ при различных b (глубина второй жидкости) и фиксированной разности потенциалов V . Как видно из рис. 5, при увеличении глубины первой жидкости квадрат частоты колебаний стремится к некоторой асимптоте. Также из графика видно, что при увеличении глубины второй жидкости квадрат частоты возрастает. Это связано с тем, что при росте расстояния b квадрат напряженности поля $E_0^2 = -\frac{V^2}{4\pi b^2}$ уменьшается в

b^2 раз, что быстро уменьшает дестабилизирующий вклад напряженности в колебания.

Используя (22), построим графики функции $F(k)$ при различных σ в случаях отсутствия и присутствия электрического поля. Как видно из рис. 6, при увеличении коэффициента поверх-

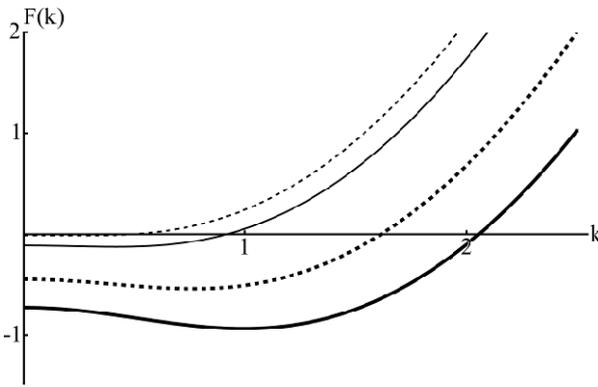


Рис. 2. Зависимость функции $F(k)$ от волнового числа k . Сплошная толстая линия для $b_1 = 2$, пунктирная толстая – для $b_2 = 2,2$, сплошная – для $b_3 = 2,6$, пунктирная – для $b_4 = 2,8$. Рассчитана при $V = 6\pi^{1/2}$; $\rho_2 = 0,6$ (здесь и далее) в безразмерных переменных, в которых $\rho_1 = 1$; $g = 1$; $\sigma = 1$.

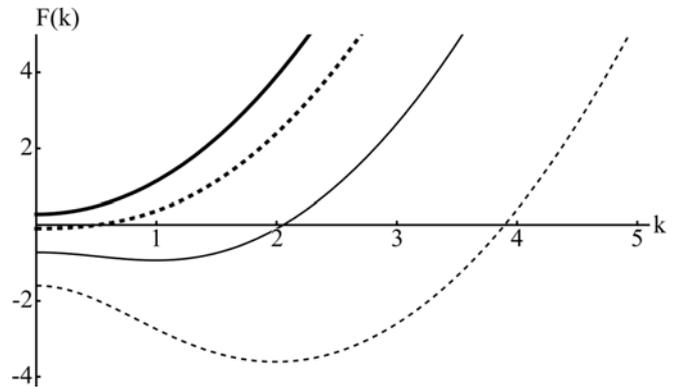


Рис. 3. Зависимость функции $F(k)$ от волнового числа k . Сплошная толстая линия для $V_1 = 2\pi^{1/2}$, пунктирная толстая – для $V_2 = 4\pi^{1/2}$, сплошная – для $V_3 = 6\pi^{1/2}$, пунктирная – для $V_4 = 8\pi^{1/2}$. Рассчитана при $b = 2$; $\rho_2 = 0,6$.

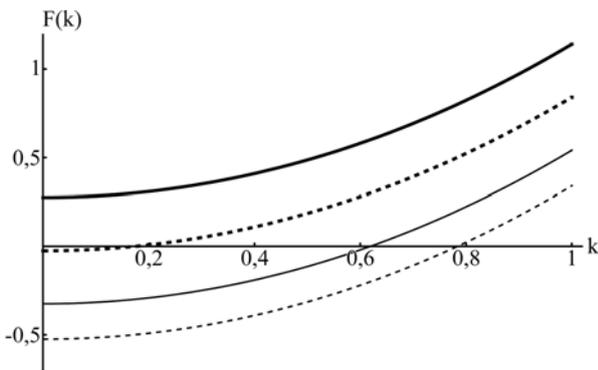


Рис. 4. Зависимость функции $F(k)$ от волнового числа k . Сплошная толстая линия для $\rho_2 = 0,6$, пунктирная толстая – для $\rho_2 = 0,9$, сплошная – для $\rho_2 = 1,2$, пунктирная – для $\rho_2 = 1,5$. Рассчитана при $V = 2\pi^{1/2}$; $b = 2$.

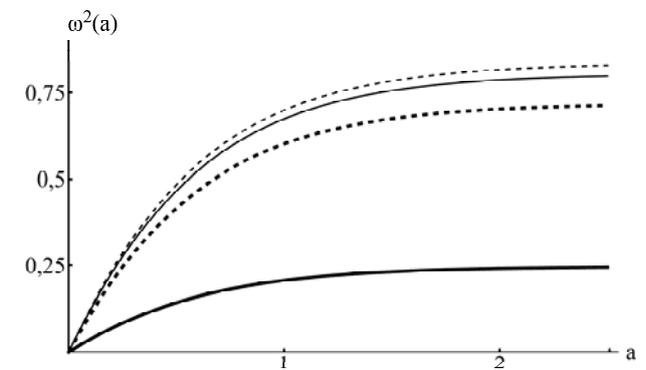


Рис. 5. Зависимость квадрата частоты колебаний жидкости ω^2 от толщины нижнего слоя жидкости a . Сплошная толстая линия для $b_1 = 3$, пунктирная толстая – для $b_2 = 6$, сплошная – для $b_3 = 9$, пунктирная – для $b_4 = 12$. Рассчитана при $V = 6\pi^{1/2}$; $\rho_2 = 0,6$.

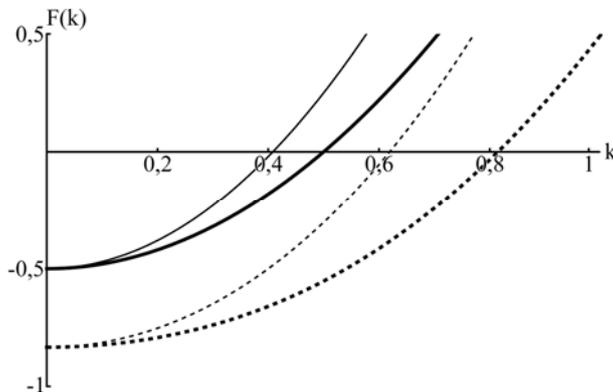


Рис. 6. Зависимость функции $F(k)$ от волнового числа k . Сплошная толстая линия для $\sigma_1 = 2$; $V = 0$, пунктирная толстая – для $\sigma_1 = 2$; $V = 6\pi^{1/2}$, сплошная – для $\sigma_2 = 3$; $V = 0$, пунктирная – для $\sigma_2 = 3$; $V = 6\pi^{1/2}$. Рассчитана при $\rho_2 = 1,5$.

ностного натяжения σ область неустойчивости уменьшается. Также из графика видно, что при воздействии электрического поля область неустойчивости возрастает. Это связано, как уже неоднократно упоминалось выше, с дестабилизирующим вкладом напряженности в колебания.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В проведенном аналитическом исследовании было получено дисперсионное уравнение для капиллярно-гравитационных колебаний на заряженной поверхности раздела двух ограниченных,

несмешивающихся жидкостей. В ходе работы выяснилось, что область неустойчивости колебаний жидкости уменьшается при увеличении толщины верхнего слоя жидкости и при увеличении коэффициента межфазного натяжения. Наличие же электрического поля приводит к расширению области неустойчивости. Увеличение плотности верхней жидкости (в том числе в случае более плотной верхней жидкости) ведет к увеличению области неустойчивости вследствие увеличения дестабилизирующего вклада неустойчивости Тейлора.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 12-01-31327 мол_а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сретенский Л.Н. *Теория волновых движений жидкости*. М.: Наука, 1977. 816 с.
2. Ле Блон П., Майсек Л. *Волны в океане*. Т. 2. М.: Мир, 1981. 366 с.
3. Белоножко Д.Ф., Ширяева С.О., Григорьев А.И. *Нелинейные волны на заряженной поверхности жидкости*. Ярославль: ЯрГУ, 2006. 288 с.
4. Ширяева С.О. Линейное взаимодействие волн на заряженной границе раздела сред при наличии тангенциального разрыва поля скоростей. *ЖТФ*. 2001, **71**(3), 9–16.
5. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Федоров М.С. Капиллярный аналог эффекта «мертвой воды» в стратифицированной жидкости с заряженной границей раздела сред. *ЖТФ*. 2010, **80**(7), 8–17.
6. Григорьев А.И., Фёдоров М.С., Ширяева С.О. Влияние электрического поля на капиллярный эффект «мертвой воды». *ЖТФ*. 2012, **82**(6), 9–19.
7. Mercier M.J., Vasseur R., Dauxois T. Resurrecting Dead-water Phenomenon. *Nonlinear Proc Geoph*. 2011, **18**, 193–208.
8. Левич В.Г. *Физико-химическая гидродинамика*. М.: Физматлитгиз, 1959. 699 с.
9. Стокер Дж. *Волны на воде*. М.: ИЛ, 1959. 617 с.
10. Melcher J.R. *Field-coupled Surface Waves. A Comparative Study of Surface Coupled Electrohydrodynamics and Magnetohydrodynamics Systems*. Cambridge, 1963. 190 p.
11. Курочкина С.А., Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. Об устойчивости волновых течений в тонких слоях жидкости с заряженной свободной поверхностью. Часть 1. Волны малой амплитуды. *ЭОМ*. 2003, (3), 26–36.
12. Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И., Курочкина С.А., Санасарян С.А. Нелинейные периодические волны на заряженной поверхности вязкой электропроводной жидкости. *ЭОМ*. 2004, (2), 27–31.
13. Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И., Климов А.В., Ширяева С.О., Курочкина С.А. Об устойчивости волновых течений в тонких слоях жидкости с заряженной свободной поверхностью. Часть 2. Периодические волны конечной амплитуды в вязкой жидкости. *ЭОМ*. 2004, (4), 66–78.

Поступила 31.01.13

Summary

The article is devoted to a research of internal waves in non-mixed liquids of finite thickness with charged interface. The parameters of internal waves are shown to depend on the thickness of layers.

Keywords: stratified liquid, capillary-gravitational waves, ideal liquid.