

Перенос тепла в сплавах

Т. Н. Абраменко^а, Е. И. Марукович^б, А. Г. Анисович^а

^аФизико-технический институт Национальной академии наук Беларуси,
ул. Купревича, 10, г. Минск, 220141, Республика Беларусь, e-mail: anna-anisovich@yandex.ru

^бИнститут технологии металлов Национальной академии наук Беларуси,
ул. Бельницкого–Бирули, 11, г. Могилев, 212030, Республика Беларусь, e-mail: info@itm.by

С помощью уравнения сохранения энергии при соответствующих краевых условиях разработана математическая модель процесса переноса энергии в сплавах при их плавлении и кристаллизации. С использованием ряда подстановок получены точные интегральные решения нелинейного дифференциального уравнения переноса тепла как для жидкой, так и твердой фаз. Введено понятие термодиффузионного отношения по изменению фракции твердого тела во времени, отнесенного к эффективной средней температуре (среднее значение между температурами солидуса и ликвидуса). Точные решения для жидкой и твердой фаз выражаются через интегралы, в которых используются эффективные значения теплоемкости фаз.

Ключевые слова: литье, тепловой поток, теплопроводность, температуропроводность, теплоемкость, термодиффузионное соотношение.

УДК 541.124/128

ВВЕДЕНИЕ

Затвердевание металла (сплава) является процессом, ответственным за формирование большинства свойств полуфабриката или изделия. Именно в период фазового перехода жидкость-твердое тело в отливке образуются дефекты, существенно снижающие ее свойства: макро- и микронеоднородность, усадочные трещины и пористость и т.д. Такие параметры процесса кристаллизации, как число, форма, скорость и направление роста кристаллов, оказывают определяющее влияние на структуру литого материала и в конечном итоге на технологические и эксплуатационные свойства. Поэтому одна из основных задач исследований в области литейного производства – это целенаправленное формирование структуры и свойств литых материалов путем управления процессами тепло- и массопереноса при кристаллизации металла.

Для исследования процессов, протекающих в сплавах, необходимо знать распределение температуры в процессе охлаждения и нагрева, чтобы описать и смоделировать процессы литья и кристаллизации сплавов методами теории тепло- и массопереноса. Для этих целей применяют уравнение переноса энергии, которое является нелинейным, так как теплофизические свойства сплавов – функции температуры.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1.1. Перенос энергии в веществах различного агрегатного состояния

Сплавы характеризуются свойствами, присущими металлическому состоянию, – высокой электро- и теплопроводностью.

Процесс плавления и кристаллизации происходит при постоянной для данного давления

температуре у эвтектических сплавов либо в узком интервале температур $T_s < T < T_l$, как у сплавов типа твёрдых растворов, и соответствует одновременному сосуществованию жидкой и твердой фаз.

Уравнение переноса энергии в сплаве, описывающее эти процессы, записывается в виде [1, 2]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c_p T) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho c_p v T) = \text{div}(\lambda \text{grad} T) + \Delta h \frac{\partial f_s}{\partial t}. \quad (1)$$

Здесь ρ – плотность жидкой фазы; c_p – удельная изобарная теплоемкость; λ – коэффициент теплопроводности; Δh – удельная теплота кристаллизации (равная теплоте плавления); T – температура; v – скорость движения жидкой фазы; t – время.

Расчёт процесса переноса тепла в рамках одномерной модели (1) предполагает, что в исследуемой системе потерями тепла (вязкое трение, излучение, внешняя теплопередача) в поперечном к тепловому потоку направлении можно пренебречь. В этом случае тепловой поток направлен только вдоль выделенной оси моделируемой системы и имеет плоские изотермы. Таким образом, для реального сплава, одномерная модель будет приемлема, если локальная температура в каждой точке плоскости его сечения перпендикулярно выделенной оси (ось OX) приблизительно одинакова.

Следуя работе [1], в которой можно найти подробный разбор и условия применимости используемой здесь модели, считаем, что изменение фракции твердого тела f_s (массовой доли) во времени определяется только изменением температуры:

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} = \frac{\partial f_s}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (2)$$

Обозначим:

$$\frac{\partial f_s(T)}{\partial T} = -\frac{k_T(\bar{T})}{T}, \quad (3)$$

где $k_T(\bar{T})$ – термодиффузионное отношение, которое определяется как [2]:

$$-k_T(\bar{T}) = \frac{(f_s)_{T_s} - (f_s)_{T_l}}{\ln \frac{T_s}{T_l}}, \quad \bar{T} = \frac{T_s \cdot T_l}{T_s - T_l} \ln \frac{T_s}{T_l}. \quad (4)$$

Уравнение (1) описывает процесс переноса энергии как в твердой ($v = 0$), так и жидкой ($v \neq 0$) фазах с соответствующими теплофизическими свойствами для каждой из них. Соответственно T_s – это температура солидуса (s), то есть значение T , при которой начинается происходить переход твердого состояния сплава в твердожидкое (двухфазное), а T_l – это температура ликвидуса l , при которой сплав из двухфазного состояния полностью переходит в жидкое состояние, а \bar{T} – эффективная средняя температура в интервале $T_s \div T_l$. Выделение удельной теплоты фазового перехода $L = \Delta h$ происходит в интервале температур двухфазной зоны ($T_s < T < T_l$). При температурах, лежащих между T_s и T_l , теплофизические свойства характеризуют смесь твердая–жидкая фазы. При этом содержание твердой фазы в интервале $T_s < T < T_l$ соответствует изменению величины f_s в диапазоне $0 < f_s < 1$. При $T < T_s$ сплав целиком представляет собой твердую фазу ($f_s = 1$), а при $T > T_l$ – полностью находится в жидкой фазе ($f_s = 0$).

Найдем решение уравнения (1) для жидкой фазы при допущении $v = \text{const}$. Левая часть уравнения (1) имеет вид

$$c_p T \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho T \frac{\partial c_p}{\partial t} + \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + v c_p T \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho v T \frac{\partial c_p}{\partial x} + \rho c_p v \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (5)$$

После несложных преобразований с учетом

$$c_p T \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) = 0, \quad \text{так как} \quad (6)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

есть уравнение непрерывности, а

$$\frac{\partial c_p}{\partial t} = \frac{\partial c_p}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \frac{\partial c_p}{\partial x} = \frac{\partial c_p}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (7)$$

получим левую часть уравнения (1) в виде

$$\rho c_p^* \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial x} \right). \quad (8)$$

Здесь

$$c_p^* = c_p \left(1 + \frac{\partial \ln c_p}{\partial \ln T} \right) \text{ и полагаем, что} \quad (9)$$

$$\frac{\partial \ln c_p}{\partial \ln T} \approx \text{const.}$$

Правая часть уравнения (1) имеет вид

$$\text{div}(\lambda \text{grad} T) + \Delta h \frac{\partial f_s}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial \lambda}{\partial T} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 - \Delta h \frac{k_T(\bar{T})}{T} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (10)$$

Можно показать, что член $\frac{\partial \lambda}{\partial T} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial \ln \lambda}{\partial \ln T} T \sigma_s$ [3]; величина $T \sigma_s$ [4] характеризует скорость рассеиваемой энергии, σ_s – локальное производство энтропии.

С учетом этих преобразований уравнение (1) для жидкой фазы принимает вид

$$c_p^* \left[\left(1 + \frac{\Delta h k_T}{\rho c_p^* \bar{T}} \right) \frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial x} \right] = \text{div}(\lambda \text{grad} T). \quad (11)$$

Полагаем, что

$$\frac{\Delta h k_T}{\rho c_p^* \bar{T}} \approx \text{const.} \quad (12)$$

Окончательно уравнение (1) с учетом (11) и (12) можно представить в виде

$$\rho \tilde{c}_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \tilde{v} \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \text{div}(\lambda \text{grad} T). \quad (13)$$

Здесь

$$\tilde{c}_p = c_p^* \left(1 + \frac{\Delta h k_T}{\rho c_p^* \bar{T}} \right), \quad \tilde{v} = v \left(1 + \frac{\Delta h k_T}{\rho c_p^* \bar{T}} \right)^{-1}. \quad (14)$$

1.2. Методы решения уравнения переноса энергии для жидкой и твердой фаз

Упростим уравнение (13) с помощью подстановки [5]:

$$\xi = t + \frac{x}{\tilde{v}}. \quad (15)$$

В таком случае

$$\rho \tilde{c}_p \frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right). \quad (16)$$

Это уравнение может быть решено путем введения координаты, задаваемой преобразованием Больцмана [6, 7]:

$$\mu = x / \sqrt{\xi}, \quad (17)$$

тогда

$$-\frac{\mu}{2} \rho \tilde{c}_p \frac{\partial T}{\partial \mu} = \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \mu} \right). \quad (18)$$

Обозначая $\frac{\partial T}{\partial \mu} = \theta'$, перепишем уравнение (18)

в виде

$$-\frac{\mu}{2} \rho \tilde{c}_p \frac{d\mu}{\lambda} = \frac{d(\lambda \theta')}{\lambda \theta'}. \quad (19)$$

Откуда

$$\ln(\lambda \theta') = -\rho \tilde{c}_p \int \frac{\mu}{2\lambda} d\mu + \ln A \quad (20)$$

или

$$\lambda \theta' = A \exp \left[-\rho \tilde{c}_p \int \frac{\mu}{2\lambda} d\mu \right]. \quad (21)$$

Дальнейшее интегрирование позволяет получить соотношение

$$T = A \int \exp \left[-\rho \tilde{c}_p \int \frac{\mu'}{2\lambda} d\mu' \right] \frac{d\mu}{\lambda} + B. \quad (22)$$

Постоянные A и B можно получить из условий

$$T(x, 0) = T_0, \quad T(0, t) = T_c, \quad \frac{\partial T(\infty, t)}{\partial x} = 0. \quad (23)$$

Решение уравнения (1) в окончательной форме примет вид [6]:

$$\theta = \frac{T_c - T(x, t)}{T_c - T_0} = \frac{\int_0^{\mu} \exp \left[-\rho \tilde{c}_p \int_0^{\mu'} \frac{1}{2\lambda} \mu' d\mu' \right] \frac{d\mu''}{\lambda}}{\int_0^{\infty} \exp \left[-\rho \tilde{c}_p \int_0^{\mu''} \frac{\mu'}{2\lambda} d\mu' \right] \frac{d\mu''}{\lambda}}. \quad (24)$$

Найдем решение уравнения (1) для случая твердой фазы $\tilde{\nu} = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho c_p T) = \text{div}(\lambda \text{grad} T) - \Delta h \frac{\partial f_s}{\partial t}. \quad (25)$$

Здесь ρ – плотность твёрдой фазы.

В отличие от [1] рассматриваемый здесь подход при T между T_s и T_l моделирует двухфазный расплав как двухслойную систему с неподвижной твёрдой фазой и подвижной жидкой фазой с равной локальной температурой в каждом поперечном сечении сплава вдоль теплового потока. Согласно (1) и (25) теплота кристаллизации выделяется в жидкую фазу, уходя из твёрдой фазы.

Уравнение (25) может быть представлено в виде

$$\rho \tilde{c}_p \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\lambda \text{grad} T), \quad (26)$$

где $\tilde{c}_p = c_p^* \left(1 - \frac{\Delta h k_T}{\rho \cdot c_p^* T} \right)$,

$$c_p^* = c_p \left(1 + \frac{\partial \ln c_p}{\partial \ln T} + \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right), \quad (27)$$

здесь полагаем

$$\frac{\partial \ln c_p}{\partial \ln T} + \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \approx \text{const}. \quad (28)$$

Уравнение (26) может быть решено с помощью подстановки

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{t}}, \quad (29)$$

тогда

$$T = A \int \exp \left[-\rho \tilde{c}_p \int \frac{\xi'}{2\lambda} d\xi' \right] \frac{d\xi}{\lambda} + B. \quad (30)$$

Постоянные A и B , так же как и для жидкой фазы, находятся из условий

$$T(x, 0) = T_0, \quad T(0, t) = T_c, \quad \frac{\partial T(\infty, t)}{\partial x} = 0. \quad (31)$$

При этом решение уравнения (25) имеет вид, формально аналогичный (24):

$$\theta = \frac{T_c - T(x, t)}{T_c - T_0} = \frac{\int_0^{\xi} \exp \left[-\rho \tilde{c}_p \int_0^{\xi'} \frac{1}{2\lambda} \xi' d\xi' \right] \frac{d\xi''}{\lambda}}{\int_0^{\infty} \exp \left[-\rho \tilde{c}_p \int_0^{\xi''} \frac{\xi'}{2\lambda} d\xi' \right] \frac{d\xi''}{\lambda}}. \quad (32)$$

Соотношения (24) и (32) являются точными решениями дифференциального уравнения (1) при соответствующих начальных и краевых условиях. Получение результатов с помощью этих нелинейных интегральных уравнений связано с выполнением интегрирования, которое можно осуществить численно, например используя одну из разновидностей метода сеток (конечных разностей). В данной работе численное интегрирование выполняется по методике, приведённой в работе [6].

Отметим, что, следуя [7], при использовании метода последовательных приближений могут быть получены и приближенные аналитические выражения. Также в [7] детально разобраны случаи со специальным типом температурных зависимостей параметров $\lambda(T)$, $c_p(T)$ и $\rho(T)$ и их комбинаций, которые приводят к общему решению в аналитическом виде, и показано, как некоторые специальные преобразования приводят данное нелинейное интегральное уравнение к более удобному для численного интегрирования виду.

2. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Заметим, что решение уравнения переноса энергии (1) для жидкой (24) и твердой (32) фаз имеет один и тот же вид и различается только переменными, входящими в точные решения уравнения (1).

Для выполнения расчёта по конкретному сплаву необходимо знать явный вид температурных зависимостей его величин λ , c_p и ρ , а также величин T_s , T_l и Δh . Это может быть сделано различными способами.

Во-первых, по известному компонентному составу сплава из фазовой диаграммы непосредственно находим параметры T_s , T_l . Параметры Δh , $\lambda(T)$, $c_p(T)$ и $\rho(T)$ для компонент сплава находим из термодинамических таблиц, например из [2, 8]. Соответственно теплофизические параметры сплава могут быть рассчитаны по известным их значениям для компонент сплава, например с помощью правила смешения, в котором вклады компонент сплава суммируются согласно их массовым долям [8].

Во-вторых, они могут быть рассчитаны по другим теплофизическим параметрам сплава, которые известны при использовании стандартных формул связи и методики, которые подробно описаны в [2]. Также можно использовать готовые феноменологические температурные зависимости, среди которых наибольшее распространение получили полиномиальные аппроксимации [8].

В-третьих, если полных данных нет, то они могут быть получены из экспериментов. Если для какого-то нового типа сплава не построены ещё достоверные фазовые диаграммы и параметры T_s , T_l и Δh неизвестны, то они могут быть определены с помощью дифференциальной сканирующей калориметрии согласно методике, изложенной в [9]. В том случае, когда для исследуемого сплава с вероятной точностью неизвестны вышеуказанные феноменологические зависимости величин λ , c_p , и ρ , оценки коэффициентов в выбранной полиномиальной модели могут быть получены непосредственно при применении статистических методов обработки данных к экспериментальным температурным зависимостям λ , c_p и ρ .

Экспериментальная база методов термического анализа, позволяющих измерять основные теплофизические параметры, постоянно расширяется. В ряде современных экспериментальных методов измерение теплофизических величин происходит в нестационарном режиме, давая непосредственно их экспериментальные температурные зависимости. Среди них один из наиболее удобных, надёжных и эффективных – метод лазерной вспышки (flash laser method) [10, 11], использующий наносекундные лазерные импульсы, и его модификация с тепловым отражением [12, 13], использующая пикосекундные импульсы. С помощью этих методов в нестационарном режиме одновременно измеряются температурные зависимости теплопроводности

сти a и теплоёмкости c_p – в итоге по известной формуле $\lambda = arc_p$ выполняется расчет теплопроводности. Другим нестационарным методом, в котором теплопроводность определяется по данным электрического сопротивления образца согласно закону Видемана-Франца, является комбинация метода коротких токовых микросекундных импульсов и метода дифференциальной сканирующей калориметрии [14]. Для измерения температурной зависимости плотности, помимо использования дилатометрического или пикнометрического метода, также при высоких температурах удобен метод проникающего γ -излучения [15].

Следует подчеркнуть, что использование одномерной модели теплопроводности востребовано не только потому, что она описывается наиболее простым дифференциальным уравнением. В ряде нестационарных методов определения теплопроводности она является естественным расчётным инструментом, так как с ее помощью можно показать, что на временах менее 1 миллисекунды процесс переноса тепла носит преимущественно одномерный характер. На сверхкоротких временах тепловые потери через боковую поверхность образца пренебрежимо малы, и процесс переноса тепла идёт вдоль одного выделенного направления. Именно модель одномерной теплопроводности используется в качестве расчётного инструмента в сверхбыстрых нестационарных методах, таких как метод лазерной вспышки.

В итоге кратко резюмируем полученные результаты по представленной в работе модели.

При температурах $T > T_l$, когда сплав содержит только чисто жидкую фазу ($f_s = 0$), в (1) следует положить $\Delta h = 0$ и соответственно в (24) подставлять величины λ , c_p и ρ жидкого сплава, используя формулы (17), (15) и (14).

Для двухфазной системы, содержащей сосуществующие жидкую и твёрдую фазы ($0 < f_s < 1$, $T_s < T < T_l$, $\Delta h \neq 0$), решениями (1) и (25) являются (24) и (32) соответственно. При этом в (24) подставляются величины λ , c_p и ρ для жидкой фазы и используются формулы (17), (15) и (14), а в (32) – для твёрдой фазы, используются формулы (29) и (27).

При температурах $T < T_s$, когда сплав содержит только чисто твёрдую фазу ($f_s = 1$), в (25) следует положить $\Delta h = 0$, и соответственно в (32) подставляются величины λ , c_p и ρ и используются формулы (29) и (27).

Для расчёта по данной модели также существенно выполнение условий $\frac{\Delta h k_T}{\rho c_p T} \approx \text{const}$ и

$\frac{\partial \ln c_p}{\partial \ln T} \approx \text{const}$ для жидкой фазы и условия

$\frac{\partial \ln c_p}{\partial \ln T} + \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \approx \text{const}$ для твердой фазы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в случае жидкой и твердой фаз мы имеем дело с эффективной теплоемкостью сплава, согласно (14) и (27), а для жидкой фазы ещё и с перенормировкой скорости её движения, как указано в (14).

Интегральное уравнение, представленное формулами (24) и (32), позволяет получить распределение температуры во времени вдоль исследуемого образца $T(x, t)$ для различного фазового состава изучаемого сплава. В зависимости от того, в какой температурный интервал ($T < T_s$, $T_s < T < T_l$ или $T > T_l$) попадает заданный рабочий диапазон температур $T_0 \div T_c$, решение уравнений (1) и (25) приводит к выражениям (24) и (32) с величинами $\lambda(T)$, $c_p(T)$ и $\rho(T)$, соответствующими одному из фазовых состояний сплава.

В конечном итоге зависимости $T(x, t)$, рассчитанные по (24) или (32), при сравнении с термическими кривыми, полученными экспериментально одним из методов термического анализа в различных точках образца, дают возможность уточнить используемые в статье приближения.

Авторы выражают глубокую благодарность проф. М.К. Болозе и научному сотруднику Института прикладной физики АН Молдовы Е.Ю. Канаровскому за ценные замечания и помощь в подготовке данной работы к публикации.

ЛИТЕРАТУРА

- Ludwig A. Thermophysical Properties Necessary for Advanced Casting Simulations. *Int J Thermophys.* 2002, **23**, 1131–1146.
- Hirschfelder T.O., Curtiss Ch.F., Bird R.B. Molecular Theory of Gases and Liquids. *John Willey and Sons Inc.*, N.Y., 1956. 929 p.
- Abramenko T.N. Dynamics of the Energy Transfer Process in Non-ideal Systems in an Example of Measurement of Gas Thermal Conductivity in Shock Tubes. *Czech J Phys.* 1996, **46**, 329–342.
- S.R. de Groot. *Thermodynamics of Irreversible Process.* Amsterdam, North-Holland Publ. Company, 1952. 242 p.
- Abramenko T.N. Influence of Cross Effects Processes in a Low-temperature Plasma. *Czech J Phys. Suppl. C.* 2004, **54**, C943–C947.
- Лыков А.В., Михайлов Ю.А. *Теория тепло- и массообмена.* М.: Госэнергоиздат, 1963. 535 с.
- Лыков А.В. *Теория теплопроводности.* М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
- Термодинамические свойства индивидуальных веществ.* Справочное издание в 4-х томах, Т.1, кн.1. Под ред. В.П. Глушко. М.: Наука, 1978. 496 с.
- Saari H., Seo D.Y., Blumm J., Beddoes J. Thermophysical Property Determination of High Temperature Alloys by Thermal Analysis. *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry.* 2003, **73**, 1, 381–388.
- Баранов В.Г., Кузьмин Р.С., Покровский С.А., Тенишев А.В., Шорников Д.П. Теплофизические свойства промышленных сплавов циркония. *Труды научных сессий МИФИ.* 2010, **2**, 134–137.
- Mitsue Ogawa, Kazuo Mukai, Takehisa Fukui, Tetsuya Baba. The Development of a Thermal Diffusivity Reference Material Using Alumina. *Measurement Science and Technology.* 2001, **12**, 2058–2063.
- Tetsuya Baba. Light Pulse Heating Thermoreflectance Methods for Thermophysical Property Measurements of Thin Films. *Proc. 1-st International Symposium on Thermal Design and Thermophysical Property for Electronics*, June 18–20, 2008, Tsukuba, Japan, 13.
- Takashi Yagi, Naoyuki Taketoshi, Tetsuya Baba. Development of Thin Film Reference Material for Thermal Diffusivity. *Proc. 1-st International Symposium on Thermal Design and Thermophysical Property for Electronics.* June 18–20, 2008, Tsukuba, Japan, 08.
- Boivineau M., Cagran C., Doytier D., Eyraud V., Nadal M.-H., Wilthan B., Pottlacher G. Thermophysical Properties of Solid and Liquid Ti-6Al-4V (TA6V) Alloy. *International Journal of Thermophysics.* 2006, **27**(2), 507–529.
- Глазов В.М., Щеликов О.Д. Термическое расширение и характеристики прочности межатомной связи в расплавах соединений АПВВ (AlSb, InSb, GaSb, InAs, GaAs). *ФТП.* 1998, **32**(4), 429–431.

Поступила 17.08.12

После доработки 26.08.13

Summary

A mathematical model of the process of transfer that occurs in metals (alloys) during their melting and crystallization has been developed with the aid of the energy conservation equation under the appropriate boundary conditions. Using a number of substitutions, exact integral solutions of a nonlinear differential heat transfer equation have been obtained for both liquid and solid phases. The notion of the thermal diffusion ratio concerning the change in the solid state fraction with time related to the reference temperature (the effective average value between the temperatures solidus and liquidus) has been introduced. The exact solutions for the liquid and solid phases are expressed in terms of a number of integrals and effective values of the heat capacities.

Keywords: casting, heat flow, thermal conductivity, thermal diffusivity, heat capacity, thermal diffusion ratio.