

## ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ РАСЧЕТА ИОНИЗАЦИОННОГО ВЫДЕЛЕНИЯ ЭНЕРГИИ В СЛАБОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ ПРИ ЕЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С ПРЕДПРОБОЙНЫМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОЛЕМ

*Институт теплофизики экстремальных состояний объединенного института высоких температур Российской Академии наук,  
Ижорская, д. 13, строение 2, г. Москва, 125412, Россия [msa@ihed.ras.ru](mailto:msa@ihed.ras.ru)*

### Введение

Достаточно сильные отклонения от закона Ома для твёрдых слабопроводящих сред в предпробойных постоянных по времени приложенных полях плоского конденсатора экспериментально обнаружил Пуль [1]. Позже аналогичный нелинейный рост электрического тока с ростом высокого напряжения как в однородном, так и в сильно неоднородном приложенном электрическом поле, экспериментально фиксировался как в жидких (типа трансформаторного масла), так и газообразных слабопроводящих средах.

Теоретически рост проводимости рассматриваемых сред с ростом модуля напряженности электрического поля обосновал Френкель в [2], используя уравнение Аррениусовского типа для объемной скорости ионизации с учетом снижения потенциала такой ионизации сильным электрическим полем. Аналогичное снижение работы выхода в предпробойном поле определено Шоттки. Онзагер [3] получил математически близкое к френкелевскому выражение для зависимости предпробойной скорости диссоциации слабых электролитов от модуля напряженности электрического поля методами физической кинетики. Постулируя выполнение закона химического равновесия (действующих масс) для рассматриваемых сред типа трансформаторного масла, Онзагер [3] и Френкель [2] получили и зависимости их проводимости от напряженности электрического поля вплоть до её пробойной величины. При этом ими не учитывались влияние дрейфа зарядов и движения жидкости в таком поле. Кроме того, в [2, 3] не учитывается их диффузия, обусловленная градиентом объёмных концентраций зарядов. В работах известных учёных теоретически не исследовались временные изменения предпробойных электродинамических характеристик, наблюдаемые при проведении опытов даже с высоковольтным источником постоянного приложенного напряжения и малой мощности. Отметим, что случаи использования источника переменного или импульсного по времени высокого напряжения с немалой разрядной мощностью в работе не рассматриваются.

С учётом таких макроскопических процессов были выведены электрогидродинамические уравнения предпробойного образования зарядов в слабопроводящих жидких средах типа трансформаторного масла. Показано [4, 5], что для применения формул Френкеля и Онзагера при расчёте установившейся проводимости исследуемых сред достаточно сохранения условия их электрической (плазменной) квазинейтральности в рассматриваемых полях. При этом плотность образующегося в предпробойных полях объёмного заряда должна быть гораздо меньше плазменной плотности само-нейтрализующегося фона зарядов разных знаков. Тогда по [4] система электродинамических уравнений зарядообразования может решаться независимо от системы гидродинамических при малости и соизмеримости скорости течений среды по сравнению со скоростью дрейфа ионов в электрическом поле. Отметим также, что в гидродинамических уравнениях движения изучаемых достаточно плотных и теплопроводных сред в сильном электрическом поле, которые рассматриваются в работе, следует учитывать влияние вязкости, например по [6]. В таких полях молекулы жидкостей типа трансформаторного масла и имеющихся в них примесей частично распадаются на ионы. Считается, что свободные электроны в указанных средах до образования в них электрических дуг и электрического пробоя в основном прилипают к нейтральным молекулам. Поэтому дополнительная макроскопическая электронная компонента при описываемом теоретическом моделировании предпробойных явлений в исследуемых средах нами не рассматривается.

В случае плоского высоковольтного конденсатора квазистационарная экспоненциальная вольт-амперная характеристика достаточно легко получается из френкелевской формулы для проводимости и уравнения сохранения заряда в дифференциальной форме. В случае сферического конденсатора распределение установившегося потенциала электрического поля в его межэлектродном промежутке удовлетворяет получаемому из этого закона сохранения заряда и френкелевской проводимости достаточно сложному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка с интегральным условием равенства разности этих потенциалов приложенному напряжению на обкладках конденсатора.

Из аналитического решения этого уравнения, полученного в [4] и удовлетворяющего такому условию, следуют омическая линейность вольт-амперной характеристики в слабых полях и её квадратичность в предпробойных, наблюдаемых при их сильной неоднородности. Полученное решение описывает математически и физически более строго, чем униполярные решения для таких полей в случае разреженных газов типа таунсендовского, переходной от линейного к квадратичному участок вольт-амперной характеристики. В этом решении вместо таунсендовской эмпирической константы напряжения зажигания короны для расчёта таких характеристик используется справочная или аккуратно определяемая по измерениям омических вольт-амперных характеристик, а в некоторых случаях рассчитываемая по составу молекул среды константа её низковольтной проводимости. В полученной нами теоретической высоковольтной вольт-амперной характеристике учтено, в отличие от таунсендовских, влияние температуры и зарядового состава молекул среды на эти предпробойные характеристики. Отметим также, что константу типа напряжения зажигания короны для рассматриваемых сред использовать при получении расчётных вольт-амперных характеристик менее целесообразно, чем для разреженных газов, ввиду имеющихся трудностей по экспериментальной регистрации такого напряжения в достаточно плотных, вязких и теплопроводных средах. При этом актуальными являются задачи расчёта ионизационного выделения энергии, приводящего к образованию разрядных дуг в таких средах и к их пробоям в окрестностях высоковольтных электродов. Для высоковольтного электрода, близкого к точечному, такая энергия нами ранее уже рассчитывалась [5]. Актуальными являются задачи расчёта такой энергии для диагностики электрических пробоев вплоть до аварий в маслонаполненных трансформаторах. Ниже будут получены аналитическое решение электрогидродинамических дифференциальных уравнений для такой нестационарной задачи в случае плоскопараллельных электродов с межэлектродным расстоянием  $d \ll \sqrt{S}$  (здесь  $S$  – площадь поверхности пластины конденсатора) и численное решение уравнений электродинамического приближения для аналогичной задачи в случае коаксиальных цилиндрических электродов с межэлектродным расстоянием гораздо меньшим, чем длина их образующих. По результатам решений будут оценены время, за которое происходит выделение энергии в нагретом цилиндрическом слое масла в трансформаторе у его поверхности, приводящее как к пробоям масла, так и к авариям в трансформаторах ввиду пробоев, а также порядок величины такого выделения.

#### Теоретическая модель и исходные уравнения

Для объёмных концентраций зарядов и, возможно, имеющихся примесей выполняются следующие неравенства в случае слабопроводящих сред:

$$\begin{cases} n_{\pm} \ll n_a; \\ n_p \ll n_a. \end{cases} \quad (1)$$

Объёмная скорость ионизации с последующим прилипанием свободных электронов к молекулам рассматриваемых жидкостей или их частичной диссоциации – это термодинамическая функция объёмных концентраций молекул среды и, возможно, имеющихся в ней молекул примесей, а также температуры и напряжённости электрического поля. Рекомбинацию зарядов ввиду прилипания свободных электронов в рассматриваемых жидкостях предполагаем только ионной (двухчастичной):

$$W_I = W_I(n_a, n_p, T, |E|) = W_I(n_a, n_p, T, 0) f(|E|) \quad (2)$$

$$\begin{cases} W_r = K_r n_+ n_- \\ K_r = Z \frac{(b_+ + b_-) |e|}{\varepsilon \varepsilon_0} \end{cases} \quad (3)$$

Выражение, используемое для  $K_r$ , в 1903 году получено Ланжевенем. Онзагер, применяя методы физической кинетики, обосновал [3] слабое влияние электрических полей вплоть до полей пробоя на величину ионного коэффициента рекомбинации. В [3] описано достаточно сильное влияние электрического поля на величину константы (коэффициента) диссоциации рассматриваемых слабых

жидких электролитов. При этом для коэффициента рекомбинации в [3] было также получено второе из уравнений (3), а для монотонно возрастающей зависимости константы диссоциации от модуля напряжённости макроскопического электрического поля выражение в виде аналитической и в нуле функции Бесселя первого порядка мнимого аргумента, близкой в предпробойных полях к неаналитической в нуле френкелевской экспоненте от корня этого модуля.

Для коэффициента диффузии свободных зарядов используем соотношение Нернста-Таунсенда-Эйнштейна:

$$D_{\pm} = \frac{k_B T b_{\pm}}{|e|}. \quad (4)$$

Вид непрерывной скалярной функции  $f$  векторного аргумента в (2) используем, с учётом вышеизложенного, по Френкелю [2]:

$$f(\vec{E}) = \exp(\beta/|\vec{E}|^{1/2}); \quad \beta = \frac{|Ze|^{3/2}}{\sqrt{\pi\epsilon\epsilon_0} k_B T}. \quad (5)$$

В этих условиях уравнения зарядообразования выглядят по [4] так:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + (\vec{V}, \nabla q) - \frac{k_B T b}{Z|e|} \Delta q + (\vec{E}, \nabla \sigma) = -\frac{q\sigma}{\epsilon\epsilon_0}, \quad \Delta \phi = -\frac{q}{\epsilon\epsilon_0}, \quad (6A)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + (\vec{V}, \nabla \sigma) + b^2 (\vec{E}, \nabla q) - \frac{k_B T b}{Z|e|} \Delta \sigma - \frac{\sigma_0^2}{\epsilon\epsilon_0} \exp(\beta/|\vec{E}|^{1/2}) + \frac{\sigma^2}{\epsilon\epsilon_0} = 0. \quad (6B)$$

Систему электродинамических уравнений (6), где учтены диффузионный и конвективный переносы ионных компонент в движущейся среде и уравнение Пуассона для потенциала макроскопического электрического поля, следует замкнуть математически гидродинамическими уравнениями для её нейтральной компоненты, близкими к уравнениям для всей смеси при выполнении соотношений (1). При этом дифференциальное уравнение, описывающее неразрывность массы несжимаемых сред, предстанет в виде

$$\text{div} \vec{V} = 0. \quad (7)$$

К (7) согласно [6] достаточно добавить только уравнение движения, не рассматривая при этом уравнение сохранения энергии и уравнения состояния. Эти уравнения, например, при теоретическом анализе охлаждения трансформаторов следует решать, используя решения выписанных выше электрогидродинамических уравнений (при этом вместо уравнения энергии можно использовать стандартное уравнение притока тепла [6], не учитывая слабого джоулева нагрева и влияния электрической поляризации, а также диссипации энергии, обусловленной вязкостью жидкости). Поле сил электрической поляризации связанных зарядов только перераспределяет давление рассматриваемой среды, что позволяет использовать вместо импульсного уравнения уравнение переноса вихрей [6]:

$$\vec{\chi} = \text{rot} \vec{V}; \quad (8)$$

$$\rho \frac{d\vec{\chi}}{dt} - \rho (\vec{\chi}, \nabla) \vec{V} - \rho \nu \Delta \vec{\chi} = [\nabla q, \vec{E}]. \quad (9)$$

В начальный момент времени

$$q(t=0) = V(t=0) = 0; \quad \sigma(t=0) = \sigma_0. \quad (10)$$

Аналитическое решение для установившегося распределения потенциала высоковольтной сферы выписанных выше уравнений получено в [4] при выведенных из них там же условиях квазинейтральности рассматриваемых слабопроводящих сред. Оно выглядит так:

$$\phi(r) = \left( \frac{I}{4\pi\sigma_0} \right)^{1/2} \left[ \frac{8}{\beta} - \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\tau\sigma_0}} \left( |\vec{E}|^{1/2} + \frac{8}{\beta} \right) \right] \text{sign}(\phi(r_0));$$

$$|\vec{E}| \exp\left( \frac{\beta}{2} |\vec{E}|^{1/2} \right) = \frac{I}{4\pi\sigma_0 r^2}; \quad |\phi(r_0)| = U. \quad (11)$$

Аналогично выглядит решение в случае сферического высоковольтного конденсатора с заданной разностью потенциалов  $U$  между его обкладками. Вышеупомянутая линейность вольт-

амперной характеристики слабых полей и квадратичность сильно неоднородных предпробойных полей получаются из (11) соответствующими предельными переходами. Распределение же предпробойного установившегося потенциала сферической симметрии по (11) порядком отличается от лапласовского ввиду влияния поля объёмного заряда. Вместе с тем в случае плоского высоковольтного конденсатора электрическое поле вне приэлектродных погранслоёв нарушения квазинейтральности электрических зарядов остаётся однородным, что подтверждается из закона сохранения заряда. Зависящая от граничных условий на электродах неоднородность пространственного распределения полей образуется при наложении предпробойного напряжения наряду с объёмным зарядом только в таких слоях. Для этих случаев результаты разных экспериментов в поле плоского конденсатора подтверждают формулу расчета квазистационарной предпробойной вольт-амперной характеристики в условиях френкелевской квазинейтральности рассматриваемых сред, которая теоретически получается из соответствующего интеграла одномерного уравнения сохранения заряда в дифференциальной форме. Тогда в случае определения константы такого интегрирования по электрическому току эта зависимость выглядит следующим образом:

$$\sigma_0 \frac{U}{d} \exp \left[ \frac{\beta}{2} \left( \frac{U}{d} \right)^2 \right] = \frac{I}{S}. \quad (12)$$

**Нестационарные решения: аналитическое для случая плоского высоковольтного конденсатора и численное для цилиндрического.**

Независимо от вихревых характеристик предпробойных течений рассматриваемых сред в межэлектродном промежутке плоского конденсатора электродинамическим уравнениям (6) и начальным условиям (10) удовлетворяет достаточно простое частное решение:

$$\begin{aligned} I &= \sigma S U / d, \quad q = 0, \quad |\vec{E}| = U / d; \\ \sigma &= \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \left[ \sigma_0 \tau + \varepsilon \varepsilon_0 - (\varepsilon \varepsilon_0 - \sigma_0 \tau) e^{-2t/\tau} \right]}{\tau \left[ \sigma_0 \tau + \varepsilon \varepsilon_0 + (\varepsilon \varepsilon_0 - \sigma_0 \tau) e^{-2t/\tau} \right]}; \\ \tau &= \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\sigma_0 \exp \left( 0,5 \beta |\vec{E}|^{1/2} \right)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Решения этих уравнений, удовлетворяющие электрохимическим (в случае диссоциации) или ионизационным граничным условиям на пластинах конденсатора, а также интегральному условию независимости от времени разности потенциалов между обкладками пластин, близки за пределами неквазинейтральных погранслоёв к решению (13). Теоретически это может быть обосновано описанными, например, в [7] методами асимптотических погранслойных разложений по малым параметрам, соответствующим режимам квазинейтральности, при членах уравнений (6) со старшими пространственными производными. Скорости предпробойных течений рассматриваемой слабопроводящей среды при этом могут быть и малыми, и соизмеримыми по сравнению со скоростями дрейфа ионов в электрическом поле. Выражения для таких критериев подобия описываемых явлений выписаны, например, в [4, 5, 8]. Там же проведены оценки величин этих параметров для исследуемых предпробойных режимов. При этом показано, что для достаточно широкого класса рассматриваемых сред условия электрической (плазменной) квазинейтральности могут выполняться и при наложении сильных электрических полей. Тогда независимо от граничных условий на электродах ампер-временную характеристику плоского конденсатора в случае источника постоянного по времени высокого напряжения можно в одномерном приближении рассчитывать по (13), откуда следует, что с ростом приложенного напряжения (до пробоя) усиливаются и временные отклонения предпробойных токов до установления. Из (13), как и следовало ожидать, формула Френкеля [2] для зависимости проводимости от напряжённости поля получается в виде временного асимптотического приближения. Далее следует, что для идеальных диэлектриков известная формула становится практически неприменимой, ибо время релаксации рассматриваемых сред при этом становится достаточно большим. Оно является и временем накопления ионизационной энергии, большая величина которой приводит к электрическим пробоям. Как следует из результатов [8], в условиях квазинейтральности формулу (13) можно получить также при разных величинах подвижностей положительных и отрицательных зарядов. Аналитического аналога формулы (13) в случае цилиндрического и сферического конденсаторов, а тем более

для двумерных конфигураций высоковольтных электродов типа “провод над плоскостью” и трёхмерных типа “игла-плоскость” из уравнений (6) получить не удастся даже без учёта влияния гидродинамики на электродинамические характеристики. В этих случаях расчёт ампер-временных характеристик до установления можно проводить численно, используя упрощённую для решения внешних по [7] задач систему уравнений (6) с начальными условиями (10). Аналог же формулы (13) для сильных неоднородных электрических полей любой сложной конфигурации может быть получен только при сохранении их лапласовости (при этом соответствующая (13) общая формула, в которой  $f$  определяется не обязательно по (5), была выписана в [9]). Для получения простейшего численного решения при цилиндрическом конденсаторе и последующих расчётах нелинейных вольт-амперных и предпробойных ампер-временных характеристик использовалась система нестационарных одномерных электродинамических уравнений, получаемая из уравнений (6А) с применением в одномерных случаях уравнения Гаусса для напряжённости электрического поля цилиндрической симметрии вместо уравнения Пуассона для её потенциала:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{E \cdot \partial \sigma}{\partial r} &= -\frac{q \cdot \sigma}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0}; \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} &= \frac{\sigma_0^2 \cdot \exp(\beta \cdot E^{1/2}) - \sigma^2}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0}; \\ \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{E}{r} &= \frac{q}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0}. \end{aligned} \quad (14)$$

При получении системы уравнений (14) в левых частях (6А) сохранены члены, описывающие нестационарные изменения квазинейтральной проводимости. При этом можно анализировать и образование объемного заряда с ростом от нулевого в начальный момент времени до установления (ранее на возможность образования такого заряда указал Остроумов [10]). Исключенные, как и в [11], члены с пространственными старшими производными влияют при выполнении критерия квазинейтральности только на изменение искомых распределений электродинамических характеристик в неквазинейтральных тонких слоях у границ объёмов, заполненных рассматриваемыми средами. При получении численного решения системы уравнений (14) использовались начальные условия (10) для проводимости и плотности объемного заряда, а также условие лапласовости электрического поля цилиндрического конденсатора в начальный момент времени:

$$E(r, 0) = \frac{U}{r \cdot \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}. \quad (15)$$

В (15), в отличие от аналогичных задач, решённых численно в предыдущих работах [12, 13],  $r_1$  и  $r_2$  – внутренний и внешний радиусы цилиндрического слоя жидкости типа слоя масла в трансформаторе (у его поверхности), охлаждаемом таким маслом. При выборе шага сетки по радиальной координате считалось, что толщины образующихся погранслоёв нарушения квазинейтральности малы по сравнению с этим шагом. Расчёты производились от внутренней цилиндрической поверхности рассматриваемого слоя к внешней. В расчётах отмечалось, что эта поверхность заряжена положительно. При смене знака её заряда задача расчёта выделения энергии в таком слое сводится к предыдущей со сменой знака по напряженности поля и плотности объемного заряда. Последнее утверждение обосновано численно в [11], где с использованием обобщений уравнений типа (14) на неизотермический случай рассматривалась аналогичная нестационарная задача об электрическом поле в окрестности остывающей дисперсной сферической частицы. Но, в отличие от неизотермической, при решении описываемой в настоящей работе изотермической задачи нестационарный интеграл сохранения заряда

$$\varepsilon \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial E}{\partial t} + \sigma E = \frac{I}{2\pi r l} \quad (16)$$

не удастся использовать для понижения порядка системы уравнений (14).

При расчетах, результаты которых будут представлены ниже, интеграл (16) применялся для контроля численного счета разностных уравнений, получаемых из дифференциальных уравнений (14) в безразмерной форме. Кроме того, по (16) определялась искомая зависимость электрического тока от времени до установления. В (16)  $l$  – длина образующей рассматриваемого цилиндрического слоя ( $l=1,626$  м для поверхности трансформатора).

Переход к безразмерным уравнениям осуществлялся изменением искомых и исходных величин:

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= \frac{t}{\tau}, \tilde{E} = \frac{Ed}{U}, \tilde{q} = \frac{qd^2}{\varepsilon\varepsilon_0 U}, \\ \tilde{\beta} &= \beta \left( \frac{U}{d} \right)^{1/2}, \tilde{r} = \frac{r}{d}, \\ \tilde{\sigma} &= \frac{\sigma}{\sigma_0 \exp\left(\frac{\tilde{\beta}}{2}\right)}.\end{aligned}\quad (17)$$

Тогда получаемая из (14) система безразмерных уравнений примет вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{E}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{E}}{\tilde{r}} &= \tilde{q}, \\ \frac{\partial \tilde{q}}{\partial \tilde{t}} + \frac{E \partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{r}} &= -\tilde{q} \tilde{\sigma}, \\ \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{t}} &= \exp\left\{\tilde{\beta} \left(\sqrt{\tilde{E}} - 1\right)\right\} - \tilde{\sigma}^2.\end{aligned}\quad (18)$$

Начальные условия для безразмерных переменных выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}(\tilde{r}, 0) &= \exp\left(\frac{\tilde{\beta}}{2}\right), \\ \tilde{q}(\tilde{r}, 0) &= 0, \\ \tilde{E}(\tilde{r}, 0) &= \frac{1}{\tilde{r} \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}.\end{aligned}\quad (19)$$

При этом интеграл (16) в безразмерном виде выглядит так:

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\sigma} \tilde{E} = \frac{\tilde{I}}{\tilde{r}}, \quad (20)$$

где

$$\tilde{I} = \frac{I}{2\pi l \sigma_0 U \exp\left(\frac{\tilde{\beta}}{2}\right)}.$$

Из аналогичной задачи для плоского конденсатора и её аналитического решения (13) следует, что установление происходит при времени  $\tilde{t} \approx 1$ . Поэтому для получения искомого численного решения выбирался шаг по времени  $\Delta \tilde{t} = 0,02$ . Установление происходило примерно за 50 шагов. Для проведения конкретных численных расчетов по радиальной координате выбирался слой у поверхности трансформатора с внутренним радиусом 0,25 м и внешним, равным радиусу поверхности трансформатора (0,42 м). То есть считалось, что охлаждаемый слой у поверхности трансформатора, заполненного маслом, можно аппроксимировать цилиндрическим слоем толщины  $d$  ( $d = r_2 - r_1$ ). При расчётах из справочников выбирались диэлектрическая проницаемость среды (2,24) и её низковольтная

проводимость ( $10^{-11} \frac{\text{Sm}}{\text{m}}$ ). Среди сред с такой низковольтной проводимостью и диэлектрической проницаемостью можно указать, например, очищенное трансформаторное масло.

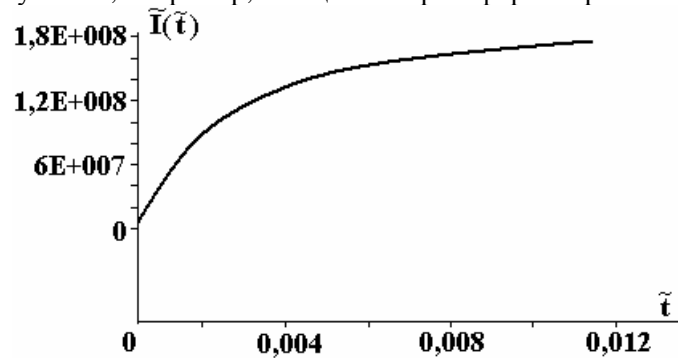


Рис. 1. Предпробойная ампер-временная характеристика цилиндрического охлаждаемого слоя у поверхности маслонаполненного трансформатора (пояснения в тексте)

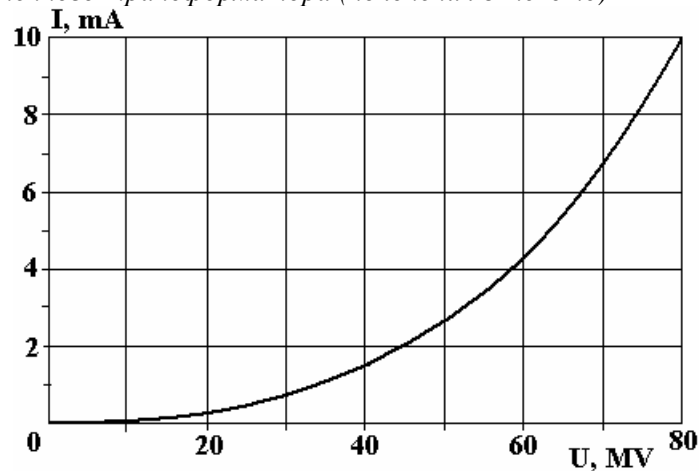


Рис. 2. Квазистационарная вольт-амперная характеристика трансформаторного масла для генерируемых трансформатором наиболее высоких напряжений

Температура среды, в отличие от предыдущих работ [12, 13], в которых численно решались близкие задачи при цилиндрической симметрии, считалась не комнатной, а близкой к температуре нагретого масла у обмоток трансформатора (400К). Приложенное напряжение выбиралось равным 10 MV (по порядку величины самого высокого напряжения, генерируемого трансформатором). При счете по пространственной координате шаг равнялся 0,1. Дифференциальные уравнения (18) заменялись соответствующими разностными [4, 9, 14]. Из них на каждом следующем временном шаге рассчитывались сначала пространственное распределение проводимости, затем плотности объемного заряда. Для получения распределения напряженности электрического поля в межэлектродном промежутке использовалось уравнение Гаусса для поля цилиндрической симметрии. После выполнения этих расчетов на каждом временном шаге по разностному аналогу интеграла (20) рассчитывались временные изменения полного тока до установления. На каждом шаге пересчитывались соответствующие матричные массивы пространственно-временных распределений искомых переменных. После чего они подставлялись в разностный аналог интеграла (20). Отметим, что результаты расчетов на первых шагах по времени уже описывались в [4, 9]. При этом там же описано отличие результатов по расчетам  $q$  и  $E$  для начальных лапласовских высоковольтных полей плоского и цилиндрического конденсаторов. Кроме того, в [3, 9] отличие искомых электродинамических характеристик в случае однородности предпробойного приложенного поля от сильной неоднородности проанализировано и в установившихся  $q$  и  $E$ . Отличие же структуры течений в сильном неоднородном приложенном поле от ячеистых течений в плоском конденсаторе описаны ранее. Поэтому в данной работе, исходя из полученных аналитических и численных решений, опишем, как и в [13], сходство искомых характеристик для случая однородного и сильно неоднородного приложенных полей. Оно состоит в достаточно быстрой в обоих случаях временной эволюции и быстром накоплении энергии, приводящих к электрическим пробоям, например в трансформаторах. Из формулы (13) следует, что время выделения такой энергии, например для трансформаторного масла, составляет доли секунды. Отметим, что

счетная устойчивость описанной в настоящей статье разностной схемы не исследовалась. Но это может быть сделано по аналогии с анализом устойчивости [14] для близких одномерных задач.

Изменение  $\tilde{\sigma}$  обусловлено влиянием предпробойного поля на скорость реакции диссоциации (ионизации) рассматриваемых сред. При этом для исходных данных, при которых проводились численные расчеты, схема которых описана выше, достаточно быстрое установление проводимости происходило за достаточно малое время (тоже доли секунды). Такие же времена установления проводимости получаются и из аналитического решения (13). Кроме того, это сходство касается и ампер-временных характеристик.

На графике рис. 1 представлена временная эволюция предпробойного тока до установления с учетом результатов численных расчетов уравнений (18) и их интеграла (20). Этот график геометрически близок к кривым предпробойных нестационарных токов плоского конденсатора, которые можно построить по формуле (13). На графике рис. 2 представлена квазистационарная вольт-амперная характеристика, аппроксимируемая квадратичной зависимостью, как и в [12], но для более высоких порядков  $U$ , генерируемых трансформатором. Для предпробойных квазистационарных режимов пространственное (радиальное) распределение напряженности поля цилиндрической симметрии из закона сохранения заряда получаем:

$$|\vec{E}| \exp\left(\frac{\beta}{2} |\vec{E}|^2\right) = \frac{I}{2\pi\sigma_0 l r}; \quad (21)$$

где  $I$  – квазистационарный ток.

Интегральный заряд  $Q$  вне приэлектродных слоев нарушения квазинейтральности

$$Q = \int_V q dV, \quad (22)$$

где  $q$  определяется из последнего уравнения (14) и уравнения (21), вычисляется аналитически. При этом следует:

$$Q = \tau I \left[ \exp\left(\frac{-\beta\sqrt{E_2}}{2}\right) - \exp\left(\frac{-\beta\sqrt{E_1}}{2}\right) \right]; E_1 = E(r_1), E_2 = E(r_2). \quad (23)$$

Тогда по (23) для данных, при которых проводились описанные численные расчеты при установлении, по порядку величины для трансформаторного масла можно достичь  $Q = 10^{-2}$  Кулон даже без учёта объёмного заряда, образующегося в неквазинейтральных погранслоях (для дуговой электрон-ионной плазмы такие слои известны как легмюровские [15]). Этот теоретический результат свидетельствует о высокой степени зарядки в высоковольтных установках. В частности, в трансформаторах, что подтверждается экспериментально. Поэтому при разработке конструкций таких установок и их эксплуатации следует предусматривать дополнительные устройства нейтрализации такого заряда или его отводки в связи с возможными электрическими пробоями. Для больших объемов масла, например в трансформаторах, генерирующих напряжение  $U = 10 \text{ MV}$ , порядок накапливаемой (в нагретом слое масла у его поверхности) энергии  $W = QU$  достигает 0,1 МДж даже без учета энергии, выделяемой в легмюровских пограничных слоях нарушения квазинейтральности [15]. Удельная плотность выделяемой энергии в случае трансформаторного масла по порядку величины для приводимых выше исходных данных поверхности трансформатора получается близкой к порядку взрывных (1 МДж/кг) [16]. То есть расчет выделения в жидкости энергии, обусловленного предпробойными электродинамическими и ионизационными процессами по предложенной модели, можно использовать для диагностики пробоев, наблюдаемых в высоковольтных устройствах, например в трансформаторах.

#### Основные обозначения:

$U$  – приложенное электрическое напряжение;  $d$  – межэлектродное расстояние;  $e$  – заряд протона;  $k_B$  – постоянная Больцмана;  $D$  – коэффициент диффузии;  $b$  – коэффициент подвижности;  $q$  – объемная плотность заряда;  $V$  – скорость движения среды;  $n$  – концентрация;  $E$  – напряженность электрического поля;  $S$  – площадь поверхности электрода;  $r$  – радиальная координата;  $t$  – время;  $\tau$  – время релаксации заряда;  $\chi$  – завихренность;  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость;  $I$  – сила электрического тока;  $T$  – абсолютная температура;  $f$  – функция скалярного или векторного аргумента;  $W$  – объемная скорость образования зарядов или нейтралов;  $Z$  – валентность иона;  $\sigma$  – проводимость среды



## ЛИТЕРАТУРА

1. *Poole H.H.* On the dielectric constant and electrical conductivity of mica in intense field // *Philosophical magazine*. 1916. S. 6. V.2. № 187. P. 112–129.
2. *Френкель Я.И.* К теории электрического пробоя в диэлектриках и электронных полупроводниках // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 1938. Т. 8. Вып. 12. С. 1291–2001.
3. *Onsager L.* Deviation from Ohm s law in a weak electrolytes // *Journal of chemical physics*. 1934. № 2. P. 599–611.
4. *Апфельбаум М.С.* Об одной расчётной схеме электрогидродинамических течений // *Электрохимия*. 1986. Вып. 11. С. 1463–1471.
5. *Апфельбаум М.С.* Задача о точечном электровзрыве слабопроводящих сред // *Электронная обработка материалов*. 2000. № 6. С. 31–42.
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидромеханика. М., 1989.
7. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущённых уравнений, Москва, 1973.
8. *Апфельбаум М.С., Козыренко В.Е.* Физическое моделирование и расчёт электрогидродинамических течений // *Электрохимия*. 1991. Вып. 7. С. 855–863.
9. *Апфельбаум М.С.* Ионизация и течение слабопроводящей жидкости в неоднородном электрическом поле // *Электронная обработка материалов*. 1988. № 1. С. 60–65.
10. *Остроумов Г.А.* Взаимодействие электрических и гидродинамических полей. М., 1979.
11. *Apfelbaum M.S., Apfelbaum E.M.* On electric field distribution in the vicinity of particles in a weakly ionized disperse medium // *Chem.Phys, Report*. 2000. Vol.18. P. 2313–2328.
12. *Апфельбаум М.С.* Одномерные стационарные задачи расчёта предпробойных вольт-амперных характеристик слабоионизованных сред // *Электронная обработка материалов*. 2005. № 2. С. 50–53.
13. *Апфельбаум М.С.* Одномерные нестационарные задачи расчёта предпробойных электродинамических характеристик слабоионизованных сред // *Электронная обработка материалов*. 2008. № 3. С. 36–45.
14. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. М., 1970.
15. *Tonks L., Langmuir I.* A general theory of the plasma of an arc // *Physical review*. 1929.V.14. P.876–922.
16. *Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., 1966.

Поступила 23.03.09

### Summary

A theoretical model of electrohydrodynamic pre-breakdown phenomena in a weakly ionized media is proposed. Differential equations and initial conditions for describing are written. The 1D analytical and numerical solutions of these equations for calculations current time characteristics are given. The ionization breakdown energy is calculated.

---