

Ф.П. Гросу\*, М.К. Болога\*, В.В. Блощицын\*\*, Ю.К. Стишков\*\*, И.В. Кожевников\*

## ЗАРЯДООБРАЗОВАНИЕ В ЖИДКИХ ДИЭЛЕКТРИКАХ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

\* *Институт прикладной физики АНРМ,  
ул. Академией, 5, г. Кишинев, MD-2028, Республика Молдова*  
\*\* *Санкт-Петербургский государственный университет,  
Научно-образовательный центр «Электрофизика» физического факультета,  
ул. Ульяновская, д.3, г. Санкт-Петербург, Петродворец, 198504, Россия*

**1. Вводные замечания.** Приложение внешнего электростатического поля к диэлектрической жидкости приводит к ее электризации и в ней со временем устанавливаются некоторые распределения электрического потенциала  $\varphi(\vec{r})$ , напряженности поля  $\vec{E}(\vec{r})$  и плотности объемного заряда  $\rho(\vec{r})$  в соответствии с общими формулами электродинамики:

$$\rho = \nabla(\varepsilon \vec{E}) = -\nabla(\varepsilon \nabla \varphi), \quad (1)$$

где  $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$  – абсолютная диэлектрическая проницаемость среды,  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки наблюдения.

Явление электризации (зарядообразования) в жидком диэлектрике имеет далеко идущие последствия. Во-первых, оно существенно отражается на переносных процессах в жидкости, в частности на законе Ома. Во-вторых, поскольку речь идет о текучих средах, в них возникают вторичные эффекты, называемые электрогидродинамическими (ЭГД) [1], обусловленные взаимодействием внешнего поля с электрически заряженной под его воздействием жидкостью, то есть кулоновскими силами объемной плотностью  $\vec{f} = \rho \vec{E}$ . В свою очередь ЭГД явления приводят к новому механизму переноса электричества, тепла и массы – молярному или конвективному, точнее, электроконвективному, поскольку обусловлен электрической конвекцией [2], аналогом естественной в поле гравитации.

Первопричиной всему является электризация жидкости, физические механизмы которой могут быть весьма разнообразны, в том числе вызванными резкой неоднородностью электрического поля, как при коронном разряде, сопровождающемся электрическим ветром в газах [2, 3] и жидкостях [4]. Этот тип электризации сравнительно хорошо изучен (см., например, [1–4]), и в дальнейшем почти исключительно мы будем касаться *однородного внешнего поля*, подразумевая под ним поле плоского параллельного конденсатора без краевых эффектов. Тогда распределения  $\varphi(x)$ ,  $E(x)$ ,  $\rho(x)$  будут означать зависимости этих величин от поперечной к обкладкам конденсатора координаты  $x$ . Как следует из уравнения (1), об электризации среды ( $\rho(x)$ ) однозначно можно судить по распределению электрического потенциала  $\varphi(x)$ , зная которое методом численного или графического дифференцирования можно получить  $E(x)$ , затем и  $\rho(x)$ . Само распределение  $\varphi(x)$  экспериментально находят методом электрического зонда [5–7], иногда используется метод Керра [8].

Цель данного исследования – систематизация и обсуждение распределений  $E(x)$  и  $\rho(x)$ , выявление их физических механизмов и создание простых математических моделей, описывающих

рассматриваемые явления. Так как в электрогидродинамике главный фактор – это силовой  $\rho\vec{E}$ , то отмеченная систематизация проведена именно по  $E(x)$  и  $\rho(x)$ .

**2. Разновидности типов электризации.** По математическим особенностям зависимостей  $E(x)$  и производной  $E'(x) = \rho/\epsilon$  можно классифицировать типичные случаи электризации. Для этого качественно построим графики этих функций (по экспериментальным данным для  $\varphi(x)$  [5–7], или  $E(x)$  [8]), приведенные и систематизированные на рис. 1, где в прямоугольных клетках (“кадрах”) расположены типичные случаи зависимостей:  $E(x)$  – нештрихованные и  $\rho(x)$  – штрихованные; анод расположен слева. При этом таблица (рис. 1), очевидно, не может претендовать на исчерпывающую полноту разновидностей электризации и в дальнейшем может быть расширена.

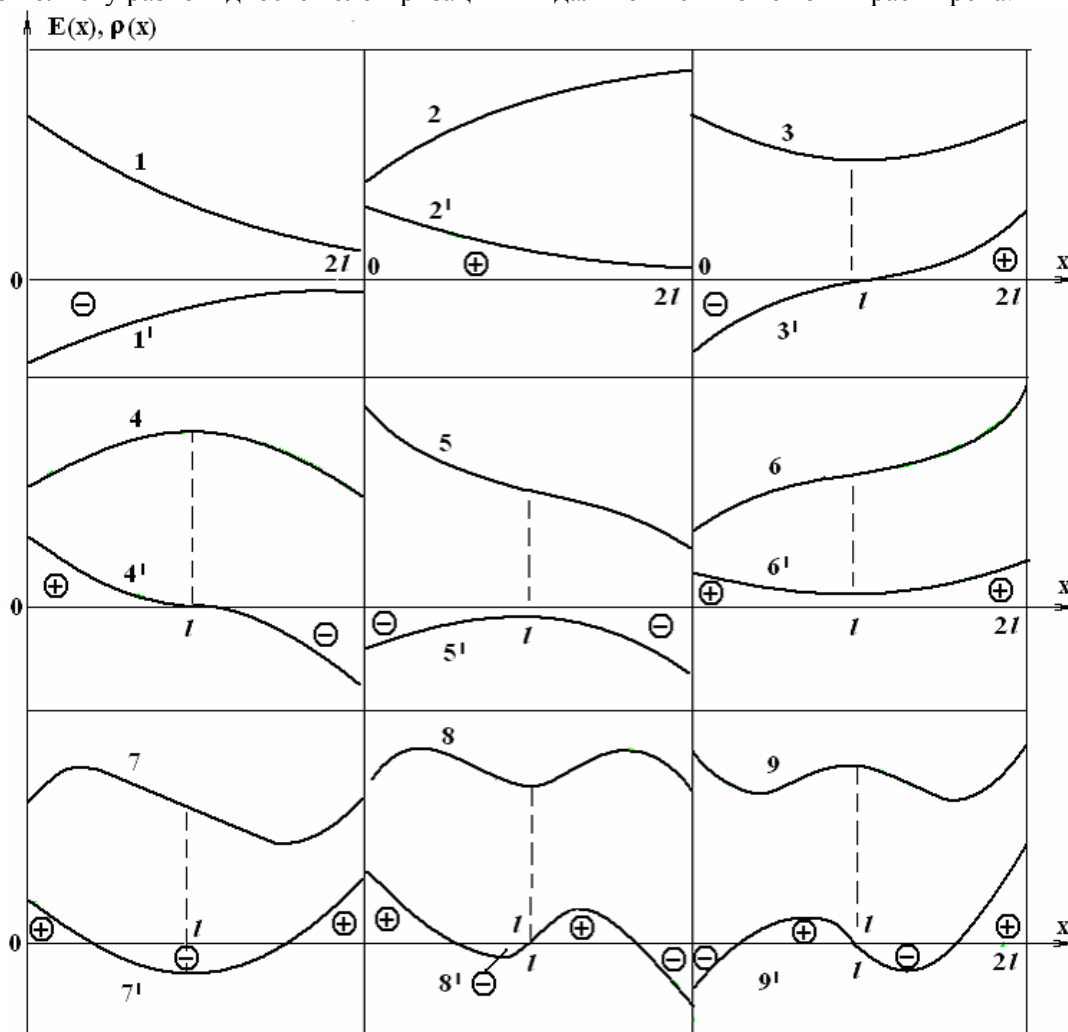


Рис. 1. Распределения зависимостей:  $E(x)$  – нештрихованные,  $\rho(x)$  – штрихованные номера

На первых двух кадрах зависимости  $E(x)$  монотонные, означающие, что межэлектродный промежуток  $0 \leq x \leq 2l$  заполнен одноименным объемным зарядом, в случае кривой 1 – отрицательным ( $\rho(x) < 0$ , кр. 1'), а для кривой 2 – положительным ( $\rho(x) > 0$ ). Поэтому можно говорить о монополярной зарядке, положительной или отрицательной соответственно кривым (2, 2') и (1, 1'). На кадрах 3, 4 убывание  $E(x)$  переходит в возрастание (кр.3) или наоборот (кр. 4). Следовательно, межэлектродный слой разбивается на два подслоя, каждый в случае 3 заряжен разноименно знаку прилегающего электрода, в случае 4 – одноименно. Поэтому данный тип зарядки принято называть [5] гетеро- и гомозарядной или гетеро- или гомоэлектризацией. Распределение 5 приведено в [8] и относится к монополярной электризации, как и 1, однако в отличие от последнего зависимость  $\rho(x)$  име-

ет экстремум. Кривая 6 является аналогом кривой 5, когда заряды меняются ролями, что хорошо видно из распределений для плотностей зарядов (кр. 5', 6').

На кадрах 7–9 изображены случаи так называемых биполярных структур [6, 7], когда сами полуслои оказываются биполярно заряженными, причем на рис. 1 (кр. 7) непосредственно прилегающий к аноду слой заряжен одноименно со знаком электрода, поэтому подслоем  $0 < x < l$  является гомобиполярным, а правый ( $l < x < 2l$ ) – гетеробиполярным. Аналогично на кадрах 8, 9 имеем соответственно гомо- и гетеробиполярную структуры. Кроме того, кривые 3–9 (3'–9') отражают некоторую симметрию (относительно центральной плоскости  $x = l$ ), однако в действительности симметрия далеко не полная, так как существенно могут различаться носители зарядов по электрофизическим свойствам (подвижности, валентности, потенциалу ионизации и др.). Заметим, что распределения типа 7, 8 обнаружены авторами [6, 7], типа 9 – теоретическое [9].

Дальнейшая задача состоит в физическом осмысливании приведенных на рис. 1 распределений и их математическом описании.

**3. Общие исходные уравнения.** Рассматривая физические механизмы процессов зарядообразования, ЭГД явления как вторичные будем считать отсутствующими, то есть гидродинамическая скорость  $\vec{v} \equiv 0$ .

Поскольку на практике зачастую имеем дело с многоионными системами, то к одним из основных следует отнести уравнения Нернста-Планка для каждой из компонент плотностей тока [1]:

$$\vec{j}_i^\pm = k_i^\pm \rho_i^\pm \vec{E} \mp D_i^\pm \nabla \rho_i, \quad (2)$$

где  $i$  пробегает все значения чисел положительных и отрицательных носителей зарядов. Коэффициенты подвижностей  $k_i^\pm$  и диффузии  $D_i^\pm$  связаны известным соотношением Эйнштейна [10]:

$$D_i^\pm = \frac{\kappa_B T}{q_i^\pm} k_i^\pm = \frac{\kappa_B T}{e z_i^\pm} \cdot k_i^\pm, \quad (3)$$

где  $\kappa_B$  – постоянная Больцмана,  $z_i^\pm$  – валентность носителей заряда,  $e$  – заряд электрона.

Каждая из компонент (2) должна удовлетворять сложному уравнению сохранения заряда типа (стационарный случай)

$$\nabla \vec{j}_i^\pm = W_i - k_{ri} n_i^+ n_m^-, \quad (4)$$

где первый член правой части отражает процесс распада нейтралов (молекул, ионных пар и т.п.) на заряженные компоненты в соответствии с известной формулой Онзагера [11]:

$$W_i = W_{oi} \cdot \exp \left[ 2 \left( e^3 E / \varepsilon \right)^{1/2} / \kappa_B T \right], \quad (5)$$

второй – обратный процесс – рекомбинации заряженных носителей ( $k_r$  – коэффициент рекомбинации);  $n_i^\pm$  – концентрации носителей, связанные с плотностями зарядов формулами

$$\rho_i^\pm = e z_i^\pm n_i^\pm. \quad (6)$$

Существует целый класс задач электрофизики жидкостей, когда эффектами распада и взаимодействия зарядов пренебрегают. Это случаи, когда оба слагаемых в правой части (4) равны нулю, что можно, по-видимому, ожидать в высокоомных жидких диэлектриках либо когда эти эффекты взаимно компенсируются, то есть при динамическом равновесии между процессами рождения и гибели носителей зарядов. В обоих случаях правая часть (4) равна нулю. Такой класс задач можно назвать равновесным в отличие от случая неравенства нулю правой части (4), когда указанное равновесие отсутствует ( $\nabla \vec{j}^\pm \neq 0$ ), в соответствии с чем можно говорить о неравновесных процессах токообразования, зарядообразования и т.п.

На начальных этапах решения проблемы об электризации жидких диэлектриков предпринимаются попытки упрощений сложных уравнений рассматриваемых процессов. В частности, аналогично Левичу [12] путем введения усредненных коэффициентов подвижностей и диффузии [9]

$$k^\pm \equiv \frac{\sum k_i^\pm \rho_i^\pm}{\sum \rho_i^\pm}; \quad D^\pm \equiv \frac{\sum D_i^\pm \rho_i^\pm}{\sum \rho_i^\pm} \quad (7)$$

задачу многокомпонентной среды *приближенно* можно свести к двухкомпонентной. Тогда уравнения (2)–(6) значительно упрощаются:

$$\vec{j}^{\pm} = k^{\pm} \rho^{\pm} \vec{E} \mp D^{\pm} \nabla \rho^{\pm}, \quad (8)$$

где

$$\rho^{\pm} \equiv \sum \rho_i^{\pm} \Rightarrow \rho = \rho^{+} - \rho^{-} \equiv \sum \rho_i^{+} - \sum \rho_i^{-}. \quad (9)$$

Уравнение неразрывности (4) примет вид

$$\nabla \vec{j}^{\pm} = \pm W \mp K_r \rho^{+} \rho^{-}, \quad (10)$$

где принято во внимание (6).

Заметим, что распределение поля относительно средней плоскости ( $x=l$ , рис. 1, кр. 3–9) плоского конденсатора может быть симметричным (четным или нечетным). Очевидно, этого следует ожидать только если свойства носителей зарядов одинаковы, в частности:

$$k^{+} = k^{-} \equiv k; \quad z^{+} = z^{-} \equiv z; \quad D^{+} = D^{-} \equiv D.$$

Следовательно, если отыскиваются симметричные структуры распределения поля, то помимо других возможных условий эти равенства заведомо следует принять во внимание. Однако они непринципиальны, поскольку при их несоблюдении нарушится лишь симметрия соответствующих распределений, поэтому для простоты учтем  $k^{\pm} = k$ ,  $D^{\pm} = D$ .

**4. Основная система уравнений.** Сложением и вычитанием уравнений (8), (10) с учетом (9), уравнений Гаусса-Остроградского и потенциальности поля получим основную систему в виде

$$\begin{cases} \vec{j} = \sigma \vec{E} - D \nabla \rho; & \nabla \vec{j} = 0; \\ \rho = \nabla (\varepsilon \vec{E}); & \vec{E} = -\nabla \varphi; \\ \vec{\delta}_j = \kappa \rho \vec{E} - \frac{D}{\kappa} \nabla \sigma; \\ \nabla \vec{\delta}_j = R; \\ \rho = \rho^{+} - \rho^{-}, \end{cases} \quad (11)$$

где обозначено:

$$\begin{cases} R = 2W_0 \exp \left[ 2(e^3 E / \varepsilon)^{1/2} / \kappa_B T \right] - 2K_r \cdot \rho^{+} \rho^{-}; \\ \vec{j} \equiv \vec{j}^{+} + \vec{j}^{-}; \quad \vec{\delta}_j \equiv \vec{j}^{+} - \vec{j}^{-}; \quad \sigma \equiv \kappa(\rho^{+} + \rho^{-}). \end{cases} \quad (12)$$

Система написана в векторной форме с тем, чтобы была применима к произвольным электродам (следующие этапы исследований). В случае плоскопараллельного конденсатора разрешенная относительно производных система уравнений (11) принимает вид

$$\begin{aligned} \rho' &= \frac{\sigma}{D} E - \frac{j}{D}; & \rho(x)|_{x=l} &= \rho_0 \\ E' &= \rho / \varepsilon; & E(x)|_{x=l} &= E_0 \\ \sigma' &= \frac{\kappa^2}{D} \rho E - \frac{\kappa}{D} \delta_j; & \sigma(x)|_{x=l} &= \sigma_0 \\ \delta_j' &= R; & \delta_j(x)|_{x=l} &= \delta_{j_0} \\ \varphi' &= -E; & \varphi(x)|_{x=l} &= 0; \quad \varphi(x)|_{x=0} = U; \quad \varphi(x)|_{x=2l} = -U, \end{aligned} \quad (13)$$

где приведены и начальные условия, причем область задания функций  $0 \leq x \leq 2l$ ,  $2l$  – межэлектродное расстояние, начало координат совмещено с анодом. С учетом выражений (11), (12) для  $\rho$  и  $\sigma$  функция источника зарядов  $R$  примет вид

$$R = 2W_0 \cdot \exp \left[ 2(e^3 E / \varepsilon)^{1/2} / \kappa_B T \right] - \frac{1}{2} K_r \cdot \left( \frac{\sigma^2}{\kappa^2} - \rho^2 \right). \quad (14)$$

Система (13) с учетом (14) первого порядка с начальными условиями (задача Коши). Существование решения и его единственность обеспечиваются известными теоремами.

**5. Возможные механизмы и математические модели электризации.** Сформулировав основные системы (11)–(13), можно приступить к рассмотрению частных случаев под углом зрения интерпретации экспериментальных результатов, отчасти отраженных на рис. 1.

**5.1. Кондуктивные механизмы** ( $j \neq 0, D = 0$ ). Первоначально рассмотрим случай наличия тока в цепи и пренебрежимой роли диффузии.

**5.1.1. Электризация, обусловленная неоднородностью среды:**  $\{\tau\} \neq 0; T \neq \text{const}$ . Из первых трех уравнений системы (11) при  $D = 0$  получим простейший механизм электризации

$$\rho = \vec{j} \cdot \nabla \tau, \quad \tau \equiv \varepsilon / \sigma, \quad (15)$$

означающий, что пронизывание неоднородной по времени электрической релаксации  $\tau$  среды электрическим током в общем случае приводит к ее электризации. Это особо понятно, если ток пересекает границу раздела двух сред с различными  $\tau$ , когда из формулы (1) вытекает, что на границе возникает поверхностный заряд с плотностью

$$\gamma = j_n (\tau_2 - \tau_1). \quad (16)$$

Благодаря этому возникает компенсирующее поле, обеспечивающее непрерывность тока ( $\sigma_1 E_{1n} = \sigma_2 E_{2n}$ ). Другой случай, хорошо объяснимый формулой (15), – это термически неоднородная среда ( $T \neq \text{const}$ ), когда в силу известной зависимости  $\varepsilon(T)$ ,  $\sigma(T)$ , а следовательно, и  $\tau(T)$  из (15) вытекает

$$\rho = \vec{j} \frac{d\tau}{dT} \nabla T \equiv -\tau \beta_\tau \cdot \vec{j} \nabla T, \quad (17)$$

где  $\beta_\tau = \beta_\varepsilon + \beta_\sigma$  – термический коэффициент времени релаксации, определяемый формулами

$$\beta_\tau = -\frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{dT} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dT} + \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dT} \equiv \beta_\varepsilon + \beta_\sigma, \quad (18)$$

обычно  $\beta_\varepsilon > 0, \beta_\sigma > 0$  (для жидких диэлектриков).

Формулы (16), (17) успешно были применены для объяснения и обобщения экспериментальных данных по конвективному теплообмену в электрических полях в гетерогенных (формула (16)) и гомогенных средах (формула (17)) [2].

**5.1.2. Гомогенные изотермические среды**  $\{\tau\} = 0; T = \text{const}$ . Опыты, в частности рис. 1, показывают, что в этом случае жидкость также электризуется, причем формула (15) остается в силе. И тогда, наоборот, из факта электризации вытекает становление жидкости неоднородной по  $\tau$ , однако в отличие от предыдущих случаев 5.1 эта неоднородность “неявная”, и решение задачи электризации равносильно задаче о появлении в среде  $\text{grad} \tau \neq 0$  под воздействием поля.

Следующий простейший механизм электризации вытекает из формул для плотностей тока (8) с учетом  $D = 0$  и коллинеарности векторов  $\vec{j} \parallel \vec{E}$ :

$$\rho = \frac{1}{E} \cdot \left( \frac{j^+}{\kappa^+} - \frac{j^-}{\kappa^-} \right) = \frac{\delta_j}{\kappa E}. \quad (19)$$

Совершенно очевидно, что в силу различия электрофизических свойств носителей зарядов, в том числе скоростей приэлектродных электрохимических реакций, этот механизм может оказаться весьма эффективным. В частности, для равновесного случая ( $R = 0$ ) распределение поля имеет вид

$$E(x) = E_0 \sqrt{1 + a \cdot (x-l)}; \quad a \equiv \frac{2\delta_j}{\varepsilon \kappa E_0^2}. \quad (20)$$

Если  $\delta_j > 0$ , то распределение будет типа 2 (см. рис. 1), при  $\delta_j < 0$  – типа 1. Когда безразмерный параметр

$$al \equiv \frac{2\delta_j \cdot l}{\varepsilon \kappa E_0^2} \ll 1, \quad (21)$$

зависимость (20) становится приблизительно линейной:

$$E(x) \cong E_0 \left( 1 + \frac{al}{2} \left( \frac{x}{l} - 1 \right) \right) \cong \frac{E_0}{1 - \frac{al}{2} \left( \frac{x}{l} - 1 \right)} \quad (22)$$

и можно объяснять среднюю часть зависимостей 5 и 6 (см. рис. 1), или линейные обратной напряженности  $E^{-1}(x)$  и  $\sigma(x)$  из [1]. Кстати, распределение  $\tau(x)$  можно найти из (15), (19).

**5.1.3. Выделение “заряженной” компоненты в удельной электропроводности.** В гомогенной жидкости в изотермических условиях, как отмечалось, неоднородность по  $\tau$  обусловлена внешним полем и носит скрытый характер. Отдельные авторы учитывают это обстоятельство, приняв зависимость, например, типа [13]:

$$\sigma = \sigma_n e^{\alpha(E-E_n)}, \quad E > E_n \quad (23)$$

или [14]

$$\sigma \sim \sqrt{F(E)}, \quad (24)$$

где  $F(E)$  – экспонента в функции источника (5). При этом уравнение для плотности тока

$$\sigma(E) \cdot E = j = \text{const} \quad (25)$$

относительно  $E$  является алгебраическим или трансцендентным с решениями  $E = \text{const}$ , следовательно,  $\rho \sim E' \equiv 0$ , то есть непосредственное применение зависимостей (23) или (24) в виде уравнения (25) для плоского конденсатора не решает вопрос электризации. Для решения этой задачи в рамках простейшей модели уравнения (25) необходимо, чтобы оно было не конечным, а дифференциальным. Это достигается, например, с учетом токов диффузии ( $\sim \nabla \rho$ ) или конвекции ( $\rho v \sim E' v$ ). Однако в гидростатических условиях и пренебрежения токами диффузии имеется другая возможность – выделение в формуле для  $\sigma$  “заряженной” составляющей  $\kappa \rho$ , где  $\kappa$  – подвижность носителей, обуславливающих  $\rho \neq 0$  ( $\kappa^+$  при  $\rho > 0$  и  $\kappa^-$  при  $\rho < 0$ ), приняв зависимость [15]:

$$\sigma = \sigma^0 + \kappa \rho = \sigma^0 + \epsilon \kappa E', \quad (26)$$

где  $\sigma^0$  – постоянная “фоновая” проводимость (в условиях  $\rho = 0$ ). Кстати, формула (26) применяется и при решении релаксационных задач [16], а также в условиях коронного разряда [3], когда второе слагаемое в (26) дает проводимость газа (униполярный разряд) при пренебрежимой роли первого.

Подставив (26) в (15), получим

$$\epsilon \kappa \vec{j} \nabla \rho = -\rho (\sigma^0 + \kappa \rho)^2. \quad (27)$$

Разложив дробь на множители

$$\frac{1}{\rho (\sigma^0 + \kappa \rho)^2} = \frac{1}{(\sigma^0)^2 \rho} - \frac{\kappa}{(\sigma^0)^2 (\sigma^0 + \kappa \rho)} - \frac{\kappa}{\sigma^0 (\sigma^0 + \kappa \rho)^2},$$

найдем

$$\vec{j} \nabla \left( \ln \frac{\kappa \rho}{\sigma^0 + \kappa \rho} + \frac{\sigma^0}{\sigma^0 + \kappa \rho} \right) = -\frac{(\sigma^0)^2}{\epsilon \kappa}.$$

Учитывая  $\nabla \vec{j} = 0$ , получаем общее решение для классических симметрий полей:

$$\ln \frac{\kappa \rho}{\sigma^0 + \kappa \rho} + \frac{\sigma^0}{\sigma^0 + \kappa \rho} = -\frac{\sigma^{02}}{n \epsilon \kappa j} \vec{e}_j \cdot \vec{r} + \frac{\vec{e}_j}{j} \cdot \text{rot} \vec{F}, \quad (28)$$

где  $\vec{e}_j \equiv \vec{j} / j - \text{ort}$  – вектора плотности тока,  $\vec{F}$  – произвольная векторная функция;  $n = 1, 2, 3$  – соответственно для плоской, цилиндрической и сферической симметрий электрического поля.

В случае плоского конденсатора из (28) находим

$$\ln \frac{\kappa \rho}{\sigma^0 + \kappa \rho} + \frac{\sigma^0}{\sigma^0 + \kappa \rho} = -\frac{(\sigma^0)^2}{\epsilon \kappa j} x + C. \quad (29)$$

Приняв известной плотность заряда на аноде

$$\rho(x)|_{x=0} = \rho_0, \quad (30)$$

из (29), (30) получим

$$\ln \frac{\theta(1+\beta)}{1+\beta\theta} + \frac{1}{1+\beta\theta} - \frac{1}{1+\beta} = -\xi, \quad (31)$$

где

$$\theta \equiv \rho/\rho_0; \quad \xi \equiv x/\delta_p; \quad \beta \equiv \kappa\rho_0/\sigma^0; \quad \delta_p \equiv \varepsilon\kappa j/(\sigma^0)^2. \quad (32)$$

При  $\beta \ll 1$  решение (31) имеет вид

$$\rho = \rho_0 e^{-x/\delta_p}. \quad (33)$$

Аналогичные ниспадающие зависимости  $\rho(x)$  имеют место и при других  $\beta$ , причем с ростом  $\beta$  спад ускоряется (рис. 2). Заметим, что согласно (33) знак заряда определяется знаком  $\rho_0$ , так что формулы (31)–(33) справедливы в случае как гомо-, так и гетерозарядов.

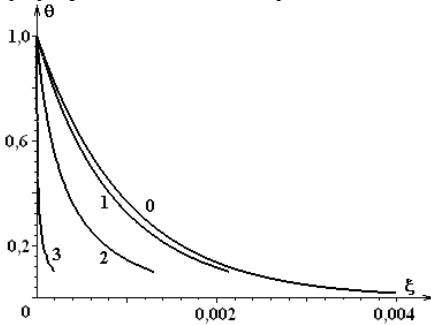


Рис. 2. Зависимость  $\theta(\xi)$ .

$$0-\theta = \exp(-1000x)$$

$$1-3 \beta = 0, 1; 1, 0; 10$$

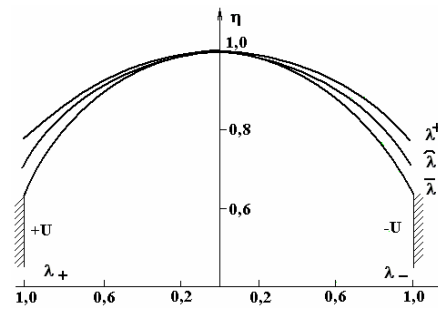


Рис. 3. Зависимости  $\bar{\eta}(\lambda)$ ,

$$\tilde{\eta}(\lambda), \quad \eta^*(\lambda)$$

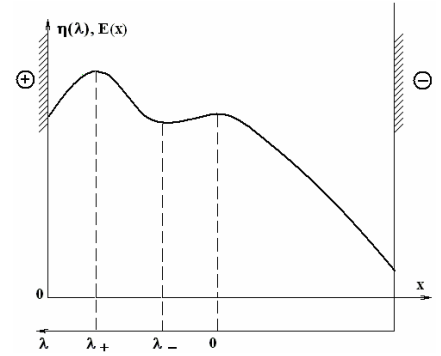


Рис. 4. Зависимость  $E(x)$  при

$$\delta_j = \text{const} > 0$$

Из (33) находим распределение  $E(x)$ :

$$E(x) = E_0 + \frac{\delta_p \rho_0}{\varepsilon} \left( 1 - e^{-\frac{x}{\delta_p}} \right), \quad (34)$$

где  $E_0 = E(x)|_{x=0}$  – на аноде.

Зависимости (33) и (34) носят приэлектродный характер, поскольку сами исходные предположения таковы: у противоположного электрода должны происходить аналогичные явления, но противоположного знака, в то время как коэффициент подвижности не предусматривает изменение знака по мере приближения к противоположному электроду.

В других зависимостях (см. ниже) получены аналогичные экспоненциальные закономерности, только с другими характерными толщинами приэлектродных слоев. Предпочтение данной модели состоит в том, что  $\delta_p \sim j$ , и это объясняет эффект проникновения зарядообразования в глубь жидкости по мере роста разрядного тока.

**5.2. Диффузионные механизмы и модели электризации ( $D \neq 0$ ).** Выделение двух подклассов механизмов электризации носит принципиальный характер, так как при кондуктивной электризации ( $D = 0, j \neq 0$ ) с исчезновением тока во внешней цепи исчезает и сам эффект. Вместе с тем возможна электризация (стационарная) межэлектродного пространства конденсатора в отключенном от внешнего источника питания состоянии, разумеется, предварительно заряженного. Речь идет о противостоянии двух процессов: поляризации свободных зарядов и их оттоке за счет диффузии. Рассмотрим этот случай.

**5.2.1. Электризация в отсутствие внешнего тока.** Этот случай реализуем при малых внешних напряжениях (подкритических), недостаточных для активации носителей зарядов. Подставив в (8)  $j^\pm = 0$ , следовательно,  $j = j^+ + j^- = 0$ , с учетом  $\vec{E} = -\nabla\phi$  получим распределения объемных зарядов:

$$\rho^\pm = \rho_0^\pm \cdot e^{\pm \frac{k^\pm \varphi}{D^\pm}}; \quad \rho_0^\pm = \rho^\pm(\varphi)|_{\varphi=0}. \quad (35)$$

Учитывая соотношение Эйнштейна

$$\frac{k^\pm}{D^\pm} = \frac{q^\pm}{\kappa_B T} \equiv \frac{1}{\varphi_*} = \frac{ez^\pm}{\kappa_B T} = \frac{z^\pm}{\varphi_0}, \quad (36)$$

где  $\varphi_0 \equiv \kappa_B T / l$  – постоянная, зависящая лишь от температуры и равная при  $T = 300$  К  $\varphi_0 \cong 2,6$  В, для  $\rho$  находим:

$$\rho = \rho^+ - \rho^- = -2\rho_* \operatorname{sh} \frac{\varphi}{\varphi_*}; \quad \rho_* \equiv \rho_*^\pm. \quad (37)$$

Решив уравнение Пуассона, получим распределение электрического поля:

$$E(\varphi) = E_* \cdot \sqrt{1 + \frac{4\rho_* \varphi_*}{\varepsilon E_*^2} \left( \operatorname{ch} \frac{\varphi}{\varphi_*} - 1 \right)}; \quad E(\varphi)|_{\varphi=\varphi_*} = E_*. \quad (38)$$

Это, очевидно, будет гетерораспределение типа 3 (см. рис. 1) с весьма резкими приэлектродными спадами при  $\varphi/\varphi_* \gg 1$ . Слой гетерозаряда весьма узок и плотен, ввиду чего экранирует практически все межэлектродное пространство.

Эту электризацию можно назвать низковольтной (ввиду отсутствия тока), что полностью соответствует распределению Больцмана (35) заряженных частиц по потенциальной энергии, а сами уравнения для токов

$$j^\pm = k^\pm \rho^\pm (-\varphi') \mp D^\pm (\rho^\pm)' = 0$$

выражают условие динамического равновесия между током сквозной проводимости (первое слагаемое) и током диффузии (второе). Отсюда становится ясна физическая сущность диффузионной электризации: убрав диффузию ( $D^\pm = 0$ ), получим  $\rho^\pm \equiv 0 \Rightarrow \rho \equiv 0$ .

**5.2.2. Приближение постоянства удельной электропроводности ( $\sigma = \text{const}$ ;  $j \neq 0$ ).** Высокovoльтная поляризация сопровождается электрическим током, и это, очевидно, должно благоприятствовать расширению областей, охваченных зарядообразованием. Одним из приближений, на которые можно рассчитывать для приемлемых объяснений отдельных случаев электризации, является принятие в первом уравнении (11)  $\sigma = \text{const}$ . Это приближение можно отчасти обосновать тем, что в том же уравнении как “компенсирующий” фактор учтется диффузионный член, что делает уравнение дифференциальным (см. 5.1.3), а также тем, что приближение  $\sigma \approx \text{const}$  согласуется с часто принимаемым, например [1],  $\rho^+ + \rho^- \ll k|\rho^+ - \rho^-|$ , то есть  $\sigma \cong \sigma^0 = \text{const}$ , которые могут нарушаться в неоднородных или резко неоднородных (коронный разряд) полях.

Подразумевая в первом уравнении (13) под  $\sigma$  некоторое усредненное постоянное значение с учетом второго, получаем уравнение для  $E$  с начальными условиями:

$$E'' - E/\delta_D^2 \cong j/\varepsilon D; \quad E(x)|_{x=l} = E_0; \quad E'(x)|_{x=l} = 0, \quad (39)$$

где

$$\delta_D \equiv \sqrt{\tau D}. \quad (40)$$

Как видно из (39), решение  $E(x)$  четно относительно середины слоя  $x = l$  и имеет вид:

$$E(x) = \left( E_0 - \frac{j}{\sigma} \right) \operatorname{ch} \left[ \frac{l}{\delta_D} \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \right] + \frac{j}{\sigma}. \quad (41)$$

Напряженность в центре слоя  $E_0$  выразим через потенциал обкладок ( $\pm U$ ) конденсатора согласно начальным условиям (13) для  $\varphi(x)$ :

$$\varphi(0) = U; \quad \varphi(l) = 0. \quad (42)$$

Тогда



$$E_0 - \frac{j}{\sigma} = \frac{l(\bar{E} - j/\sigma)}{\delta_D \cdot \text{sh} \frac{l}{\delta_D}}, \quad \bar{E} \equiv \frac{U}{l}. \quad (43)$$

Подставив (43) в (41), окончательно находим

$$E(x) = \frac{l(\bar{E} - j/\sigma)}{\delta_D \cdot \text{sh}(l/\delta_D)} \text{ch} \left[ \frac{l}{\delta_D} \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \right] + \frac{j}{\sigma}, \quad (44)$$

откуда следует: а)  $j = \sigma \bar{E} \Rightarrow E(x) = \text{const}$  – тривиальный случай отсутствия электризации; б)  $j < \sigma \bar{E}$  – случай гетерозарядки, кривая 3, рис. 1; в)  $j > \sigma \bar{E}$  – случай гомозарядки, кривая 4, рис. 1. Процессы электризации в последних двух случаях сопровождаются нарушением закона Ома.

Физический смысл этих закономерностей весьма прост. Как следует из уравнения для плотности тока,

$$j = \sigma E - D\rho' \equiv j_\sigma \pm |j_D|, \quad (45)$$

в случае а) ток диффузии отсутствует, следовательно,  $\rho \equiv 0$ ,  $E = \bar{E}$ , что оправдывает названия механизма электризации. При выполнении условия б) “гетерозарядный” диффузионный ток направлен против тока проводимости  $j_\sigma = \sigma E$ , уменьшая его (знак “-” в (45)), что и отражает данное условие. В случае в) токи проводимости и диффузии совпадают по направлению, то есть  $j > \sigma \bar{E}$ . Таким образом, в случае гетероэлектризации ток диффузии вычитается из тока проводимости, а при гомоэлектризации, наоборот, что и указано во втором равенстве (45).

Эти особенности усматриваются и по знаку второй производной  $E''(x)$  в (39).

**5.2.3. Учет**  $\sigma \neq \text{const}$ , при  $j^+ = \text{const} \neq 0$ ;  $j^- = \text{const} \neq 0$ ,  $j^+ - j^- \equiv \delta_j = \text{const}$ . Третье уравнение системы (13) интегрируется, и в результате

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{\varepsilon \kappa^2}{2D} (E^2 - E_0^2) + \frac{\kappa \delta_j}{D} (l - x). \quad (46)$$

Подстановка (46) в первое уравнение (13) приводит к основному уравнению:

$$E'' = \frac{\kappa^2}{2D^2} E^3 + \frac{1}{\varepsilon D} \left( \sigma_* + \frac{\kappa \delta_j}{D} (l - x) \right) E - \frac{j}{\varepsilon D} \quad (47)$$

с начальными условиями (39).

Приводим это уравнение к безразмерному виду:

$$\eta'' = \pi_0 \eta^3 + \pi_1 (1 + \pi_2 (1 - \xi)) \eta - \pi_3; \quad \eta(1) = 1; \quad \eta'(1) = 0, \quad (48)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \eta &\equiv E/E_0; \quad \xi \equiv x/l; \quad \pi_0 \equiv \frac{l^2 \kappa^2 E_0^2}{2D^2}; \quad \pi_1 \equiv \frac{l^2}{\tau_* D}; \quad \pi_2 \equiv \frac{l \kappa \delta_j}{\sigma_* D}; \\ \pi_3 &\equiv \frac{j l^3}{\varepsilon D E_0}; \quad \tau_* \equiv \frac{\varepsilon}{\sigma_*}; \quad \sigma_* \equiv \sigma_0 - \frac{\varepsilon \kappa^2 E_0^2}{2D}; \quad \pi_* \equiv \frac{l^2}{\tau_0 D}. \end{aligned} \quad (49)$$

Уравнения (47), (48) типа Пенлеве [17] и при  $j^+ = j^- = \text{const} \neq 0$ , то есть  $\delta_j = 0 \Rightarrow \pi_2 = 0$ , допускают разделение переменных и точное интегрирование через эллиптические интегралы. Полученное таким образом решение может служить эталоном сравнения с другими приближенными, в частности 5.2.2, а также полученными иными способами, например разложением в ряд Тейлора. Поэтому приведем эти решения, начиная с точного.

а) *Точное решение.* Полагая в (48)  $\pi_2 = 0$ , получаем

$$\eta'' = \pi_0 \eta^3 + \pi_1 \eta - \pi_3; \quad \eta(1) = 1; \quad \eta'(1) = 0; \quad 0 \leq \xi \leq 1. \quad (50)$$

Проинтегрировав с учетом начальных условий, находим

$$\eta'^2 = \frac{\pi_0}{2} \left[ (\eta^2 + a)(\eta + 1) - b^2 \right] (\eta - 1), \quad (51)$$

где

$$a \equiv \frac{2\pi_1}{\pi_0} + 1; \quad b^2 \equiv \frac{4\pi_3}{\pi_0}. \quad (52)$$

Отметим, что параметры  $\pi_1$  и  $a$  могут принимать и отрицательные значения. По правилу Декарта квадратные скобки (51) допускают один положительный корень; обозначив его  $\eta \equiv \alpha > 0$ , получим

$$b^2 = (\alpha^2 + a)(\alpha + 1) > 0. \quad (53)$$

Подставив (53) в (51) и поделив полученное выражение на  $\eta - \alpha$ , найдем разложение (51) на множители

$$\eta'^2 = \frac{\pi_0}{2} [\eta^2 + (\alpha + 1)\eta + \alpha(\alpha + 1) + a](\eta - 1)(\eta - 1). \quad (54)$$

С помощью (53) легко убедиться, что выражение в квадратных скобках (54) положительно, поэтому знак всей правой части (54) определяется знаком произведения

$$(\eta - \alpha)(\eta - 1) > 0, \quad (55)$$

поскольку  $\eta'^2 > 0$ . Решения этого неравенства таковы:

$$\alpha > 1 \text{ и } \eta \leq 1 \quad (56)$$

и

$$\alpha < 1 \text{ и } \eta \geq 1. \quad (57)$$

Ввиду того, что  $\eta(1) = 1$ , из (56) и (57) следует, что зависимость  $\eta(\xi)$  – выпуклая при  $\alpha > 1$ , следовательно, в этом случае электризация гомополярная (см. рис. 1, кривая 4) и гетерополярная при  $\alpha < 1$  (см. рис. 1, кривая 3).

Разделив в (54) переменные, получим

$$\int_{\eta}^1 \frac{dz}{\sqrt{(z - \alpha)(z - 1)[(z - m)^2 + n^2]}} = \pm \int_{\xi}^1 \sqrt{\frac{\pi_0}{2}} dt. \quad (58)$$

Интеграл слева эллиптический I-го рода, то есть  $F(\varphi, \kappa)$ , и согласно [18]:

$$\frac{1}{\sqrt{qp}} F(\varphi, \kappa) = -\sqrt{\frac{\pi_0}{2}} (\xi - 1) \equiv \sqrt{\frac{\pi_0}{2}} \lambda, \quad (59)$$

где  $\lambda \equiv 1 - \xi$  – координата, отсчитываемая от середины ( $x = l$ ) влево к аноду ( $x = 0$ ),  $k$  и  $\varphi$  – модуль и аргумент интеграла  $F(\varphi, \kappa)$ , определяемые равенствами [18]:

$$\varphi = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{q}{p} \cdot \frac{1 - \eta}{\alpha - \eta}}; \quad \kappa = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(p + q)^2 + (\alpha - 1)^2}{pq}}; \quad (60)$$

$$p^2 = (m - \alpha)^2 + n^2; \quad q^2 \equiv (m - 1)^2 + n^2;$$

$$m \equiv -\frac{\alpha + 1}{2}; \quad n^2 \equiv \alpha(\alpha + 1) + a - \left(\frac{\alpha + 1}{2}\right)^2. \quad (61)$$

Из первого выражения (60) находим формулу

$$\eta(\varphi) = \frac{\alpha \left( q/p\alpha - tg^2 \frac{\varphi}{2} \right)}{q/p - tg^2 \frac{\varphi}{2}}, \quad (62)$$

которая вместе с предыдущими дает полное точное решение задачи (50). При этом по значениям  $\pi_0, \pi_1, \pi_3$ , то есть  $a$  и  $b$ , определится корень  $\alpha$  (51), зная который можно найти  $m$  и  $n$ , затем  $p$  и  $q$  по

формулам (61). Далее становится известным  $k$  по второй формуле (60). Зная  $k$  и задавая  $\lambda$ , начиная с нуля, по таблицам  $F(\varphi, \kappa)$  находим соответствующие значения  $\varphi$  и по формуле (62) окончательно  $\eta(\varphi)$ . Эту же задачу решаем приближенно.

б) *Приближенное решение.* Поскольку заданы начальные условия и само уравнение, то простейшее приближенное решение можно получить разложением в ряд Тейлора, а коэффициенты методом дифференцирования уравнения (в отличие от метода неопределенных коэффициентов). Причем ряд будет по четным степеням разности  $(\xi - 1)$ :

$$\eta(\xi) = \eta(1) + \frac{1}{2}\eta''(1)(\xi-1)^2 + \frac{1}{4!}\eta^{IV}(1)\cdot(\xi-1)^4 + \frac{1}{6!}\eta^{VI}(1)(\xi-1)^6 + \dots, \quad (63)$$

так как задача (50) заведомо имеет четное решение.

Тогда

$$\begin{aligned} \eta''(1) = \pi_* - \pi_3 \equiv A; \quad \eta^{IV}(1) = (2\pi_0 + \pi_*)A; \quad \eta^{VI}(1) = [18\pi_0A + (2\pi_0 + \pi_*)^2]A \\ \pi_* \equiv \pi_1 + \pi_0 = l^2 / \tau_0 D; \quad \tau_0 \equiv \varepsilon / \sigma_0. \end{aligned} \quad (64)$$

в) *Сравнение решений.* Для оценки точности и апробации приближенных решений (44) и (63) сравним их с точным (62) на численном примере.

**По точной формуле (62).** Примем:  $\pi_* / \pi_0 = 0,1$ ;  $\pi_3 / \pi_0 = 0,55$ ;  $\pi_0 = 1$ . Исходное уравнение (50):  $\eta'' = \eta^3 - 0,90\eta - 0,55$ ;  $a = 2(\pi_* - \pi_0) / \pi_0 + 1 = 2\pi_* / \pi_0 - 1 = -0,80$ ;  $b^2 = 4 \cdot 0,55 = 2,20$ ; уравнение для  $\alpha$  (53):  $\alpha^3 + \alpha^2 - 0,8\alpha - 3 = 0 \Rightarrow \alpha = 1,3219 \Rightarrow m = -1,1610$ ;  $n^2 = 0,9215$ ;  $p = 2,6620$ ;  $q = 2,3848$ ;  $\kappa = 0,9999 \Rightarrow \eta' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{[(\eta + 1,661)^2 + 0,9215](\eta - 1)(\eta - 1,3219)}$ . (65)

Точное решение по (62):

$$\bar{\eta}(\varphi) = 1,3219 \cdot \frac{0,6720 - tg^2 \frac{\varphi}{2}}{0,8883 - tg^2 \frac{\varphi}{2}}. \quad (66)$$

Угол  $\varphi$  находим из (59):

$$F(\varphi; 0,9999) = 1,7741 \cdot \lambda. \quad (67)$$

По значениям  $0 \leq \lambda \leq 1$  и табл.  $F(\varphi, \kappa)$  [19] находим  $\varphi$ , затем по формуле (66)  $\bar{\eta}(\varphi)$  (см. табл. 1, строка 3).

**По приближенной формуле (63).** Подстановка числовых значений (64) в (63) приводит к расчетной формуле

$$\eta(\lambda) \cong 1 - 0,2250\lambda^2 - 0,0394\lambda^4 + 0,0023\lambda^6. \quad (68)$$

Результаты приведены в табл. 1, строка 4. **По точной формуле (44) приближенного уравнения (39).** Приводим (44) к безразмерному виду, введя обозначения (49). Получаем:

$$\eta(\lambda) = \left(1 - \frac{\pi_3}{\pi_*}\right) \text{ch}(\sqrt{\pi_*} \lambda) + \frac{\pi_3}{\pi_*}, \quad (69)$$

в числах  $\eta(\lambda) = -4,50 \text{ ch}(0,32\lambda) + 5,50$ . Результаты приведем в табл. 1, строка 5.

Таблица 1. Вычисления  $\eta(\lambda)$

№	$\lambda$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	$\delta_{cp}$
1	$F(\varphi, 0, 99)$	0	0,35	0,71	1,06	1,42	1,77	–
2	$\varphi^0$	0	20	37	52	63	69	–
3	$\bar{\eta}$	1,00	0,99	0,96	0,89	0,77	0,64	–
4	$\tilde{\eta}$	1,00	0,99	0,96	0,91	0,84	0,73	–
5	$\eta_*$	1,00	0,99	0,96	0,82	0,85	0,77	–
6	$\frac{\Delta\tilde{\eta}}{\tilde{\eta}}$	0	0	0	0,02	0,09	0,14	4%
7	$\frac{\Delta\eta_*}{\eta_*}$	0	0	0	0,03	0,10	0,20	6%

На рис. 3 представлены графики соответствующих зависимостей, из которых следует, что имеем гомозарядные распределения, причем точное решение  $\bar{\eta}$  дает наибольшую плотность приэлектродного заряда, а  $\eta^*$  – наименьшую, что, по-видимому, связано со сглаживанием зависимости  $\rho(x)$  в приближении  $\sigma \cong \text{const}$ . Таким образом, приближенные решения как в смысле принятия  $\sigma = \text{const}$  в точном уравнении (39), так и при разложении в ряд по разности  $\xi - 1$  (формулы (63), (64)) приводят к приемлемым результатам, особенно на данном начальном этапе исследований. При этом важным является апробация последнего случая, поскольку метод разложения в ряд Тейлора достаточно универсален и может быть использован к усложненным вариантам задач.

В разобранных моделях не нашли отражения кривые 5–9, и в особенности 7–9, то есть биполярные структуры. В рамках равновесного класса еще нерассмотренным остался случай  $\pi_2 \neq 0$ , который, очевидно, не может привести к симметричным решениям указанного типа. Тем не менее рассмотрим последний равновесный механизм  $\delta_j = \text{const} \neq 0$ , и по-прежнему  $R = 0$ .

г) Несимметричный случай  $\delta_j = \text{const} \neq 0$ . Приближенное решение. Разложим решение в ряд Тейлора с точностью до  $(1 - \xi)^4$ :

$$\eta(\xi) \cong 1 + \frac{1}{2}A(1 - \xi)^2 + \frac{1}{6}B(1 - \xi)^3 + \frac{1}{24}(1 - \xi)^4, \quad (70)$$

где согласно предыдущим результатам

$$A = \pi_* - \pi_3; \quad \pi_* = \frac{l^2}{\tau_0 D}; \quad B \equiv \pi_1 \pi_2 = \frac{\kappa \delta_j l^3}{\varepsilon D^2}; \quad C = NA; \quad N = (2\pi_0 + \pi_*). \quad (71)$$

Переходя к переменной  $\lambda = 1 - \xi$ , из (70), (71) получим

$$\eta(x) \cong 1 + \frac{A}{2}\lambda^2 + \frac{B}{6}\lambda^3 + \frac{C}{24}\lambda^4. \quad (72)$$

Как и следовало ожидать, фактором асимметрии является коэффициент  $B \sim \delta_j$ .

Найдем в интервале (полуслое)  $0 < \lambda < 1$  экстремумы (72):

$$\eta'(\lambda) = A\lambda \left( 1 + \frac{B}{2A}\lambda + \frac{N}{6}\lambda^2 \right) = 0 \quad (73)$$

и корни, кроме нулевого:

$$\lambda_{\pm} = -\frac{3B}{2NA} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{8NA^2}{3B^2}} \right). \quad (74)$$

При условиях

$$\beta = -B/A > 0; \quad 8N/3\beta^2 < 1 \quad (75)$$

существуют два положительных корня  $\lambda_+ > \lambda_-$  :

$$\lambda_{\pm} = \frac{3\beta}{2N} \left( 1 \pm \sqrt{1 - 8N/3\beta^2} \right) > 0. \quad (76)$$

Исследуем знак второй производной:

$$\eta''(\xi) = \eta''(\lambda) = A \left( 1 + \frac{B}{2A} \lambda + \frac{N}{6} \lambda^2 \right) + A \lambda \left( \frac{B}{2A} + \frac{N}{3} \lambda \right). \quad (77)$$

Отсюда

$$\eta''(\lambda_+) = -\frac{BM}{2} \lambda_+; \quad \eta''(\lambda_-) = \frac{BM}{2} \lambda_-, \quad (78)$$

где

$$M \equiv \sqrt{1 - 8N/3\beta^2}.$$

Из первого соотношения (75) следует, что при  $j_+ > j_-$ , то есть  $B > 0 \Rightarrow A < 0$ , и согласно (78) при значении корня  $\lambda = \lambda_+$  имеем максимум, а при  $\lambda = \lambda_-$  – минимум. Так как  $\eta''(0) = A < 0$ , то  $\lambda = 0$  есть точка второго максимума. Примерный вид графика  $\eta(\lambda)$  ( $E(x)$ ) приведен на рис. 4, из которого следует, что в полуслое вблизи анода возникает биполярная структура с максимумом. Появление приэлектродной биполярной структуры оказалось связанным хотя и с постоянной, но отличной от нуля разностью парциальных токов  $j_+ - j_- = \delta_j \neq 0$ . Этот факт наводит на мысль о том, что биполярные симметричные и другие структуры следует искать в классе неравновесных механизмов электризации ( $R \neq 0$ ), то есть  $\delta_j \neq \text{const}$ .

**5.2.4. Простейший неравновесный механизм.** Рассмотрение класса задач ( $R \neq 0$ ) – это следующий этап исследований, однако для зондирования перспектив рассмотрим самый простой случай  $R = \text{const} \neq 0$ , не требующий особых обоснований.

Тогда  $\delta_j$  находим интегрированием:

$$\int_{\delta_{j_0}}^{\delta_j} d\delta_j = \int_l^x R dx \Rightarrow \delta_j = R(x-l) + \delta_{j_0} = Rl(\xi-1) + \delta_{j_0}, \quad (79)$$

где

$$\delta_{j_0} = j_0^+ - j_0^- = \delta_j(x)|_{x=l}. \quad (80)$$

Ищем симметричные структуры, тогда  $\delta_{j_0} = 0$  и в (48) вместо  $\pi_2(1-\xi)$  следует писать

$$\pi_2'(1-\xi^2); \quad \pi_2' \equiv \frac{eK\delta_0}{2\sigma_*D}; \quad \delta_0 = (j^+ - j^-)|_{x=0}. \quad (81)$$

Уравнение (48) переписется в виде

$$\eta'' = \pi_0 \eta^3 + \pi_1 \left( 1 + \pi_2'(1-\xi)^2 \right) \eta - \pi_3; \quad \eta(1) = 1; \quad \eta'(1) = 0. \quad (82)$$

С точностью до членов четвертого порядка

$$\eta(\xi) = 1 + \frac{1}{2!} A (\xi-1)^2 - \frac{1}{4!} (\beta - N) (\xi-1)^4, \quad (83)$$

где

$$A \equiv \pi_* - \pi_3; \quad N \equiv 2\pi_0 + \pi_*; \quad \beta \equiv -B/A; \quad B \equiv \pi_1 \pi_2. \quad (84)$$

Исследуем (83) на экстремум:

$$\eta'(\xi) = A(\xi-1) - \frac{A(\beta-N)}{6} (\xi-1)^3 = A(\xi-1) \left( 1 - \frac{\beta-N}{6} (\xi-1)^2 \right). \quad (85)$$

Экстремальные точки

$$\xi_{\pm} = 1 \pm \sqrt{\frac{6}{\beta - N}}; \beta > N \quad (86)$$

$$\begin{aligned} \eta''(\xi) &= A - \frac{A(\beta - N)}{2}(\xi - 1)^2 = A \left( 1 - \frac{\beta - N}{2}(\xi - 1)^2 \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \eta''(\xi_{\pm}) &= A \left( 1 - \frac{\beta - N}{2} \cdot \frac{6}{\beta - N} \right) = -2A. \end{aligned} \quad (87)$$

Рассмотрим два случая:

а)  $A > 0 \Leftrightarrow \pi_3 / \pi_* < 1 \Rightarrow B < 0 \Leftrightarrow j^+(0) \leq j^-(0) \Rightarrow \eta(\xi_{\pm}) = \eta_{\max}$ . В этом случае имеем биполярную (“двухгорбовую”) структуру типа 8 (см. рис. 1), причем она образована на фоне гетерораспределения 3, как и должно быть при  $A > 0$ . На аноде  $j^-(0) > j^+(0)$ , следовательно, отрицательные ионы более активны, поэтому рассасываются быстрее положительных, в результате непосредственно на аноде образуется гомозаряд на общем фоне гетерозаряда.

б)  $A < 0 \Leftrightarrow \pi_3 / \pi_* > 1 \Rightarrow B > 0 \Leftrightarrow j^+(0) > j^-(0) \Rightarrow \eta(\xi_{\pm}) = \eta_{\min}$  имеем “двухямовую” биполярную структуру типа 9 (см. рис. 1) на фоне гомозарядообразования при  $A < 0$  (кривая 4, рис. 1).

Дальнейший анализ показывает, что в следующем линейном приближении для функции источника  $R(x) = a_0 + a_1 x$  получим распределение типа 5–7.

Итак, кривые 1–4 находят, по крайней мере, качественное объяснение в рамках равновесных, отчасти неравновесных (кривые 3, 4) механизмов электризации. Кривые 5–9 объяснимы в простейших аппроксимациях функций источника  $R(x)$  константой или линейной.

Следовательно, в общих чертах все кривые на рис. 1 нашли качественное объяснение, и тем самым создана предпосылка дальнейших уточнений и количественных исследований, в том числе компьютеризированных.

**6. Компьютерное моделирование зарядообразования.** В [20–22] приведены метод, программа и результаты расчета численного моделирования процессов появления объемного заряда в слабопроводящих жидких диэлектриках.

В настоящей работе создана программа с удобным интерфейсом, позволяющая проводить оперативные расчеты и анализировать полученные результаты в режиме реального времени. Однако конкретные расчеты по ней будут проведены на следующих этапах исследований, по мере завершения рассмотренных выше аналитических решений. Примером численного эксперимента является расчет процессов токопрохождения и зарядообразования в случае цилиндрического конденсатора по ранее отлаженной программе.

**6.1. Программа для плоского слоя.** Моделируется одномерный гидростатический случай: жидкость считается несжимаемой, неподвижной, температура в объеме постоянна, а переменные зависят только от одной пространственной координаты  $x$ , нормальной к электродам, начало отсчета соответствует аноду.

Функция источника в законе сохранения заряда представляется формулой (5)  $W - \alpha n_+ n_-$ , где  $W$  – диссоциация по Френкелю-Онзагеру<sup>1</sup>:

$$W = W_0 \exp \left[ \frac{2e^{3/2} (E)^{1/2}}{(\epsilon \epsilon_0)^{1/2} kT} \right],$$

$\alpha$  – коэффициент рекомбинации по Ланжевону:

$$\alpha = \frac{e(b_+ + b_-)}{\epsilon \epsilon_0} = \frac{2eb}{\epsilon \epsilon_0}. \quad (88)$$

Здесь  $\epsilon$  – относительная диэлектрическая проницаемость. Полную систему ионной проводимости, описывающую процесс зарядообразования, можно переписать в виде

<sup>1</sup> Ниже встречаются несколько иные обозначения, например " $b_{\pm}$ " вместо  $\kappa_{\pm}$  и др., присущие специфике обозначений программы.

$$\frac{\partial n_{\pm}^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x^*} (n_{\pm}^* v_{\pm}^*) = W^* - \alpha^* n_{+}^* n_{-}^* ; \quad (89)$$

$$-\frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x^{*2}} = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} e (n_{+}^* - n_{-}^*) ; \quad (90)$$

$$\frac{j_{\pm}}{e} = n_{\pm}^* v_{\pm}^* = -D_{\pm}^* \frac{\partial n_{\pm}^*}{\partial x^*} - b_{\pm}^* n_{\pm}^* \frac{\partial \varphi^*}{\partial x^*} . \quad (91)$$

При этом граничные условия записываются следующим образом:

$$-D \frac{\partial n_{\pm}^*}{\partial x^*} \pm n_{\pm}^* E^* = A_{\pm}^{a*} - K_{\pm}^{a*} n_{\pm}^* \quad \text{— на аноде,} \quad (92)$$

$$-D \frac{\partial n_{\pm}^*}{\partial x^*} \pm n_{\pm}^* E^* = -A_{\pm}^{k*} + K_{\pm}^{k*} n_{\pm}^* \quad \text{— на катоде,} \quad (93)$$

где в правой части (92) и (93) коэффициенты рождения и гибели ионов на электродах. В программе может учитываться зависимость коэффициентов рождения от поля; гибель ионов на электродах – от приэлектродных концентраций.

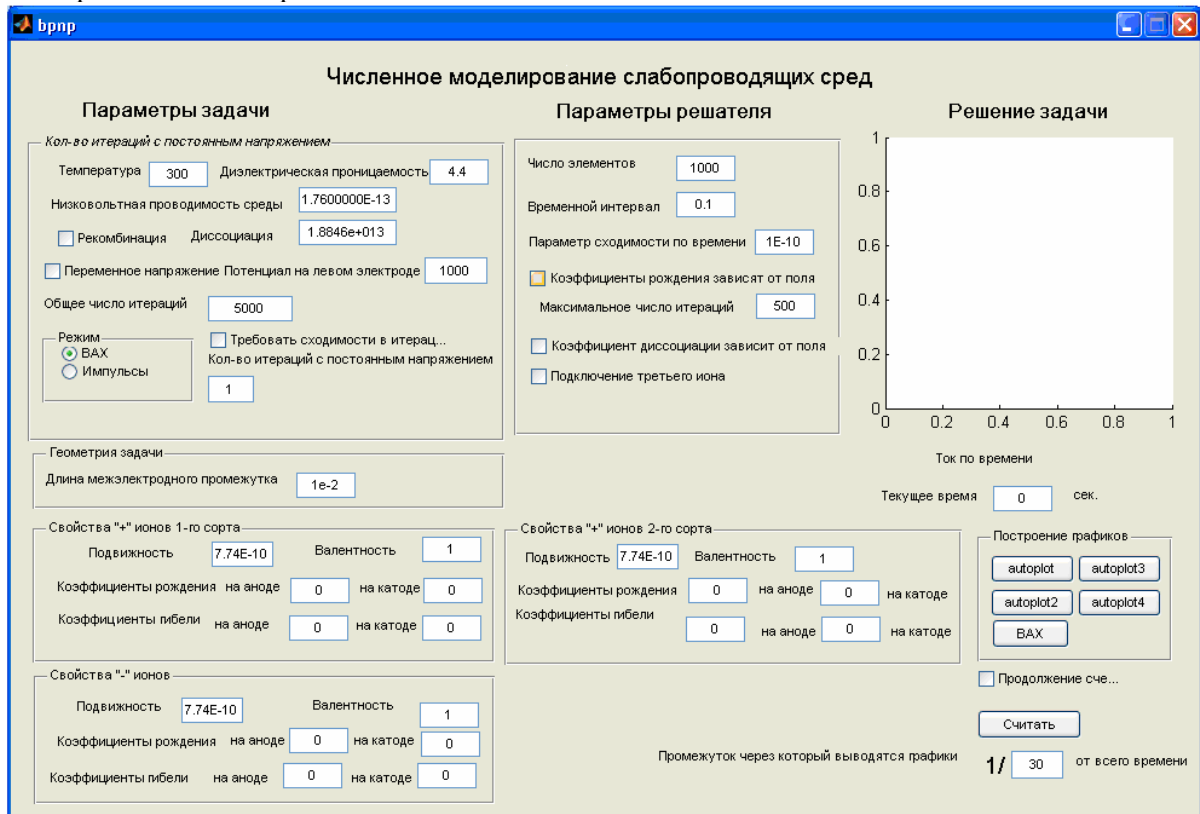


Рис. 5. Интерфейс программы

Система (88)–(93) будет решаться в безразмерном виде. Для численного решения системы предусматривается неявная разностная схема, линеаризованная и решаемая методом скалярной прогонки. Критерием окончания счета является выход решения на стационар (плотность тока  $j = \text{const}$ ).

Программа BPNP для моделирования слабопроводящих сред представляет собой набор подпрограмм Matlab, снабженных интерфейсом. Программа тестировалась с MATLAB 7.0.1.24704 (R14) Service Pack 1.

Результаты расчетов сохраняются в структурах MATLAB. При этом реализованы функции построения графиков структур. Структуры представляют собой удобную конструкцию для сохранения распределений полей во времени.

Для запуска программы необходимо: запустить MATLAB, перейти в директорию с набором подпрограмм (например, т.о. `cd /path/to/bnpn`) и набрать в Command Windows Matlab команду `wrapper`, которая запустит интуитивно понятный интерфейс.

Интерфейс программы (рис. 5) разделен на три части (колонки):

- Параметры задачи (препроцессор)
- Параметры решателя
- Решение задачи (постпроцессор)

В параметрах задачи задаются характеристики слабопроводящей жидкости (значения в системе единиц СИ) и следующие параметры:

- *Температура* (явно не фигурирует в полной системе ЭГД, используется для вычисления коэффициента диффузии по формуле Энштейна (3)) [300]<sup>2</sup>.

- *Диэлектрическая проницаемость* [4.4].

- *Низковольтная проводимость среды* [1.76E-13].

- *Рекомбинация* (значение вычисляется по формуле Ланжевена) [выкл].

- *Переменное напряжение* (включение возможности изменения напряжения) [выкл].

- *Потенциал на левом электроде* (если отключ. переменное напряжение – задается разность потенциалов между электродами, в случае вкл. опции «переменное напряжение» задается функция изменения напряжения с переменной  $t$ , например,  $1000+1000*\cos(2*3.14*t/50)$ ) [1000].

- *Общее число итераций* (максимальное число итераций в режиме изменения напряжения, определяется как произведение количества итераций при заданном напряжении на количество шагов по изменению напряжения) [5000].

- *Режим* (в случае режима ВАХ программа продолжает счет при данном напряжении, пока система не выйдет на стационар или не превысит лимит итераций) [ВАХ].

- *Требовать сходимости в итерациях* (если при некотором напряжении решение не вышло на стационар, то при включенной опции решение прекратится, в противном случае оно будет продолжаться, пока не будет превышен лимит итераций, а далее перейдет к следующему значению напряжения) [выкл].

- *Количество итераций с переменным напряжением* (число итераций в импульсном режиме перед приложением следующего значения напряжения) [1].

Далее задается геометрия задачи, и поскольку решается одномерная задача, то единственным параметром является длина электролитической ячейки.

Параметры ионов жидкости (1-го или 3-го сорта). Для примера рассмотрим задание параметров положительных ионов первого сорта:

- *Подвижность* [7.74E-10]

- *Валентность* [1]

- *Коэффициенты рождения на аноде* [0], *катоде* [0]

- *Коэффициенты гибели на аноде* [0], *катоде* [0]

В качестве параметров решателя задаются следующие величины:

- *Число элементов* (суммарное количество элементов, размер и форма элементов задаются в подпрограмме mesh.m) [1000].

- *Временной интервал* (шаг по времени в итерациях) [0.1].

- *Параметр сходимости во времени* (задается в %, при различии решений менее заданного процента решение считается вышедшим на стационар) [0.01].

- *Коэффициенты рождения* зависят от поля [ выкл ].

- *Коэффициент диссоциации* зависит от поля (значение вычисляется по формуле Онзагера) [выкл].

- *Подключение третьего иона* (при включении опции решаются уравнения для трех ионов) [выкл].

Конкретные расчеты по этой программе предусмотрены на следующем этапе исследований. Ниже в качестве примера приводим некоторые результаты исследований по отлаженной программе для цилиндрического слоя.

## **6.2. Пример численного эксперимента по моделированию процесса зарядообразования в цилиндрическом слое жидкости.**

На рис. 6 приведены результаты развития процесса при симметричном рождении ионов на обоих электродах при наличии рекомбинации и диссоциации.

<sup>2</sup> В скобках [ ] указывается значение по умолчанию.



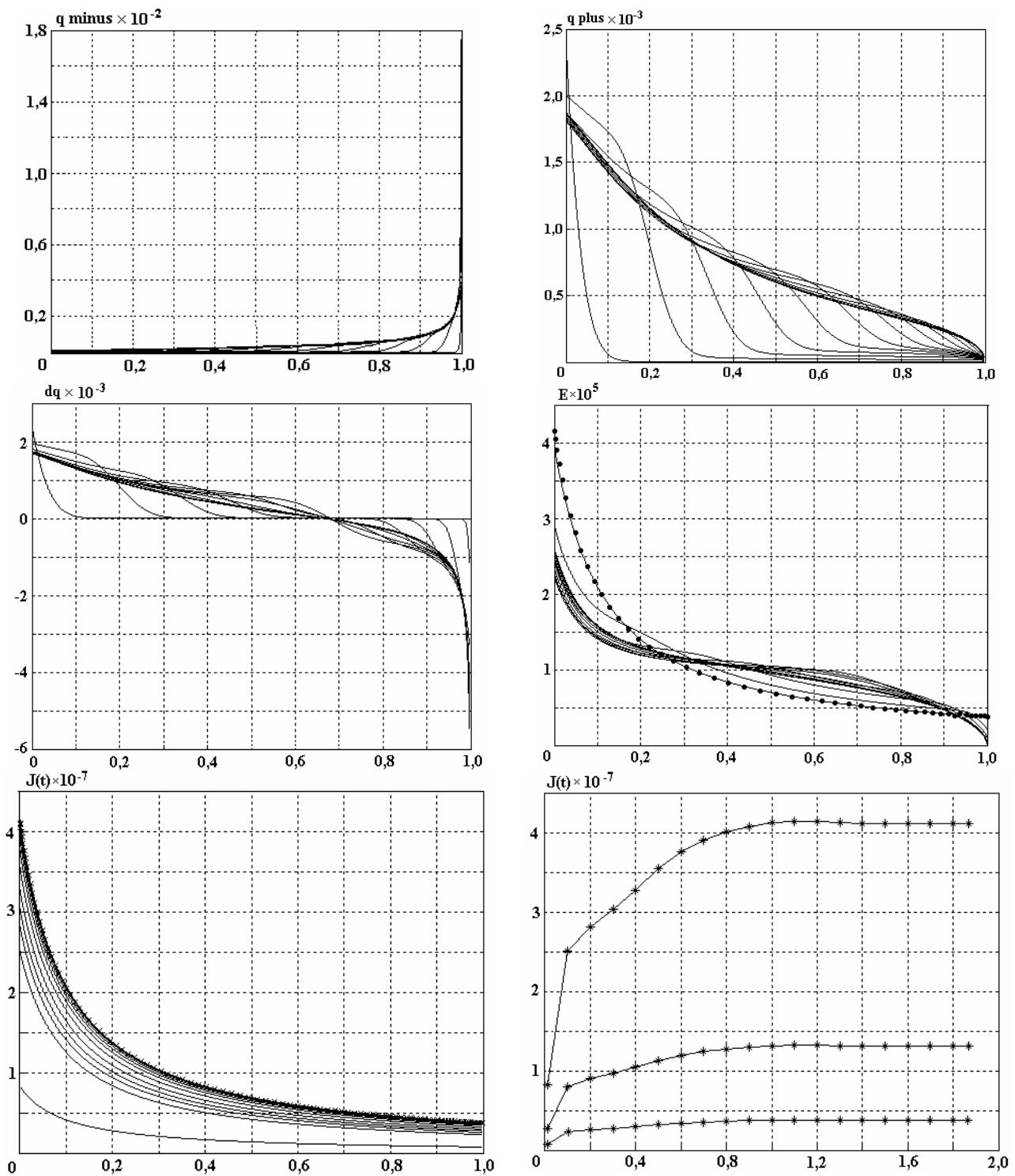


Рис. 6. Решение для цилиндрической системы координат

Графики слева направо и сверху вниз отражают динамику изменения концентрации отрицательных и положительных ионов, объемного заряда, напряженности электрического поля, распределения плотности полного тока и зависимости от времени. Межэлектродное расстояние – 0,01 м, радиус внутреннего электрода – 0,001 м.

В установившемся состоянии видна асимметрия в распределении объемного заряда, нулевая точка сдвинута вправо относительно середины межэлектродного промежутка. Поле у каждого электрода провалено относительно электростатического значения (без объемного заряда). Плотность полного тока на внутреннем и внешнем электродах становится различной, изменяется скорость роста тока. Следует заметить, что распределение плотности полного тока убывает  $\sim 1/r$  во времени.

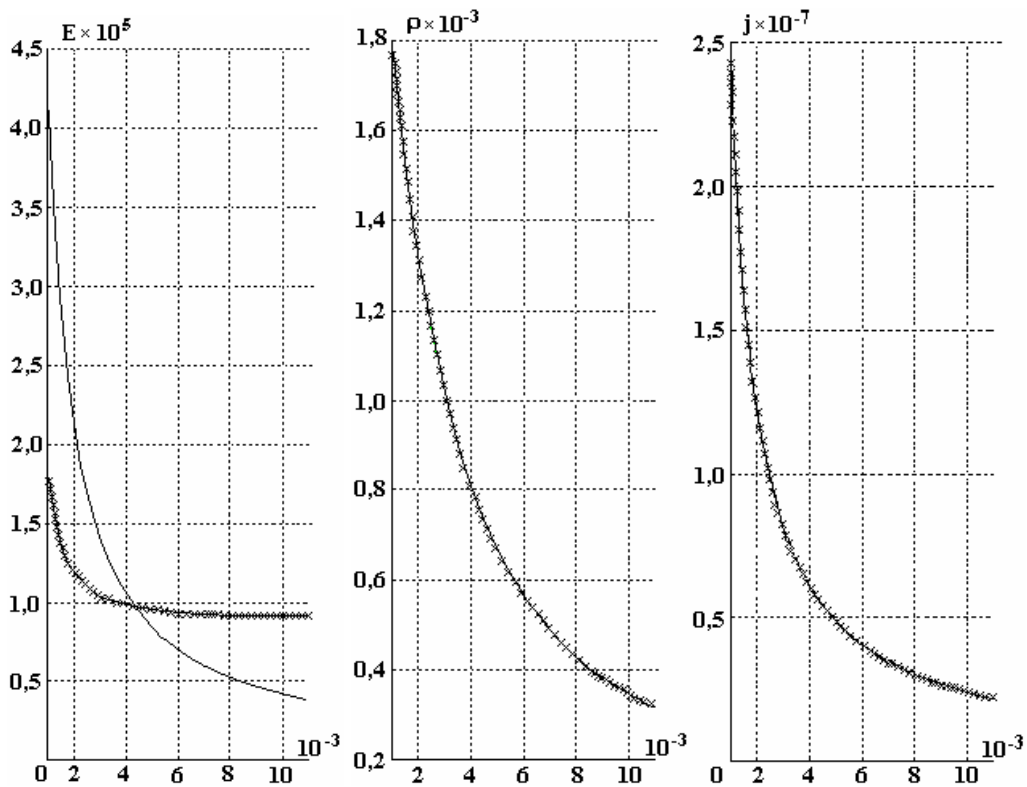


Рис. 7. Напряженность электрического поля, плотность заряда, плотность тока: сплошная линия - теоретическое решение, крестики - численный расчет

На рис. 7 приведены тестирования программы путем сравнения результатов расчетов для униполярной инжекции в случае коаксиальных электродов с теоретическим решением. Численное решение совпадает с теоретическим (классическим) с точностью 0,6 %.

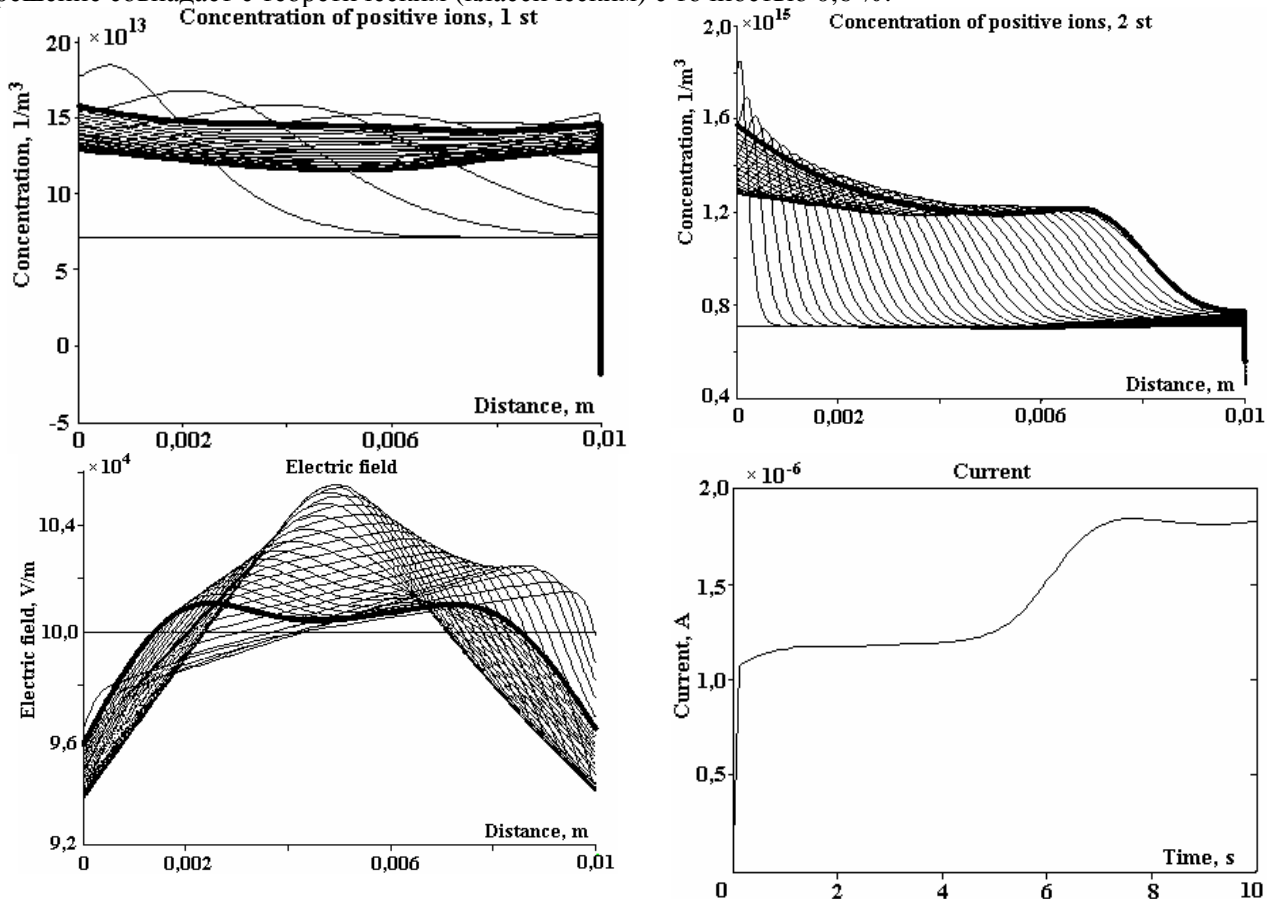


Рис. 8. Моделирование тернарной системы

На рис. 8 представлены результаты моделирования тернарной (три вида ионов) системы. Ток при наличии двух сортов положительных ионов выходит на стационар в два этапа: сначала выходит ток, создаваемый быстрыми ионами, а затем ток возрастает за счет медленных ионов.

Примечательно, что в стационарном состоянии (жирная кривая) распределение напряженности и в цилиндрическом слое становится “двухгорбовым”, как и в аналитическом решении 5.2.4. Это говорит о характерности данного распределения для неравновесных механизмов электризации.

Программа позволяет моделировать импульсное воздействие на ячейку и получать вольт-амперные характеристики в автоматическом режиме (рис. 9).

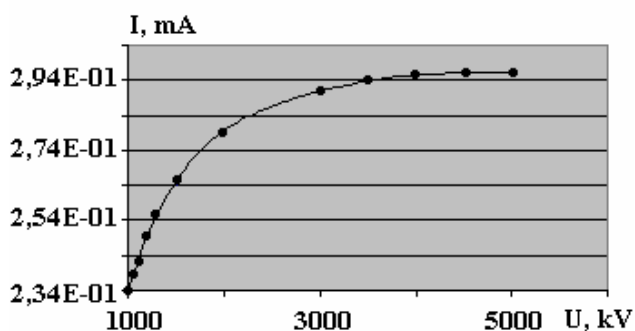


Рис. 9. Вольт-амперная характеристика

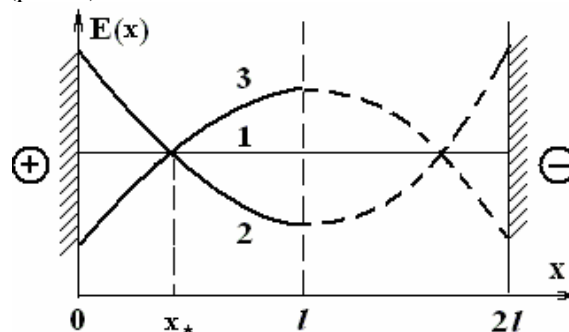


Рис.10.  $E(x)$ : 1- $E = \text{const}$ ; 2- $E'' > 0$ ; 3- $E'' < 0$

Варьируя входные параметры программ: коэффициенты рождения и гибели ионов на электродах, амплитуду коэффициента диссоциации, разность потенциалов между анодом и катодом, зарядности и подвижности ионов, – можно получать различные распределения поля в межэлектродном промежутке.

Итак, реализован численный эксперимент в виде алгоритма для решения нелинейной нестационарной задачи о прохождении электрического тока в слабопроводящей жидкости в гидростатическом приближении. Учтены влияние токов диффузии и миграции, объемные и поверхностные электрохимические процессы, зависимость коэффициента рождения и скорости диссоциации от напряженности электрического поля. В системе Matlab написаны программы для решения задач в плоском одномерном случае. Программы имеют удобный интерфейс и позволяют оперативно производить расчеты в режиме реального времени, что предусматривается на будущих этапах исследований. В качестве числового примера приведены результаты расчета по отлаженной программе для цилиндрического слоя.

**7. Электризация и закон Ома.** Вопросы электризации слабопроводящего диэлектрика ( $\sigma \neq 0$ ) и выполнение закона Ома рассматриваем в основном на качественном уровне модели (44), которая, как было отмечено, адекватно и наглядно объясняет наиболее часто встречаемые на практике типы электризации (кривые 1–4, рис. 1).

**7.1. Связь закона Ома с распределением  $E(x)$ .** Из (44) для плотности тока найдем ( $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$ ):

$$j = \sigma \cdot \frac{E(x) \text{sh} \mu - \bar{E} \cdot \mu \cdot \text{ch} \nu(x)}{\text{sh} \mu - \mu \text{ch} \nu(x)}, \quad (94)$$

где

$$\mu \equiv l / \sqrt{\tau D} \equiv l / \delta_D; \quad \nu(x) \equiv (l - x) / \delta_D; \quad \bar{E} = u / l. \quad (95)$$

Придаем выражению (94) более компактную форму:

$$\omega \equiv \frac{ar(x) - \text{ch} \nu(x)}{a - \text{ch} \nu(x)}, \quad (96)$$

где введены обозначения

$$\omega \equiv \frac{j}{\sigma \bar{E}}; \quad a \equiv \frac{\text{sh} \mu}{\mu}; \quad r(x) \equiv \frac{E(x)}{\bar{E}}. \quad (97)$$

Интервалы изменения переменных  $x, \nu, \text{ch}\nu$  приведены в табл. 2. Постоянная  $a > 1$ , причем  $\lim_{\mu \rightarrow 0} a(\mu) = 1$ . Так как  $\text{ch}\mu > a$ , то в интервале  $(0; l)$  существует точка  $x = x_*$ , в которой знаменатель (96) обратится в нуль, то есть

$$a - \text{ch}\nu(x_*) = 0 \Leftrightarrow \text{ch} \frac{l - x_*}{\delta_D} = \frac{\text{sh}\mu}{\mu}. \quad (98)$$

Таблица 2. Величины  $x, \nu$

$x$	0	$l$
$\nu$	$\mu$	0
$\text{ch}\nu$	$\text{ch}\mu$	1

Кроме того, имеют место неравенства:

$$\begin{aligned} 0 < x < x_* &\Rightarrow a - \text{ch}\nu(x) < 0, \\ x_* < x < l &\Rightarrow a - \text{ch}\nu(x) > 0. \end{aligned} \quad (99)$$

Усреднив равенство, получаемое из (81), и применив теорему о среднем, запишем:

$$\omega(a - \overline{\text{ch}\nu}) = a\bar{r} - \overline{\text{ch}\nu}, \quad (100)$$

где

$$\bar{r} \equiv r(x_*) = \frac{1}{l} \int_0^l r(x) dx; \quad \overline{\text{ch}\nu} = \text{ch}\nu(x_*) = \frac{1}{l} \int_0^l \text{ch}\nu(x) dx. \quad (101)$$

Из (100), (101) следует  $\bar{r} = r(x_*) \equiv r_* = 1$ , а выражения (94) и (96) при  $x \rightarrow x_*$  приводят к неопределенности типа  $\omega = \left[ \frac{0}{0} \right]$ , которую раскроем:

$$\begin{aligned} \omega &= \lim_{x \rightarrow x_*} \frac{ar(x) - \text{ch}\nu(x)}{a - \text{ch}\nu(x)} = \lim_{x \rightarrow x_*} \frac{\nu'(x) \cdot \text{sh}\nu(x) - ar'(x)}{\nu'(x) \cdot \text{sh}\nu(x)} = \lim_{x \rightarrow x_*} \frac{\text{sh} \frac{l-x}{\delta_D} \cdot \left( -\frac{1}{\delta_D} \right) - ar'(x)}{\left( -\frac{1}{\delta_D} \right) \cdot \text{sh} \frac{l-x}{\delta_D}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \omega = 1 + \frac{a \cdot \delta_D \cdot r'(x_*)}{\text{sh}\nu_*}; \quad \delta_D \equiv \sqrt{\tau D}; \quad \nu_* \equiv \frac{l-x}{\delta_D}. \end{aligned} \quad (102)$$

Таким образом, приняв в точке разрыва  $\omega(x)$  в (96) правую часть равенства (102), устраняем разрыв этой функции.

Выше отмечалось, что критерием гетеро- или гомозарядки может служить величина параметра  $\omega$ :  $\omega = 1$  – нейтральная среда,  $\omega < 1$  – гетерозаряд,  $\omega > 1$  – гомозаряд. Из этого признака следует:  $r'(x_*) = 0$  соответствует  $\omega = 1$ ,  $r'(x_*) < 0$  – гетерозаряд,  $r'(x_*) > 0$  – гомозаряд. Физический смысл рассматриваемых признаков лучше всего проследить по поведению функции  $r(x) \equiv E(x)/\bar{E}$ .

1.  $\omega < 1$ . Из (96) с учетом (98) вытекает необходимость рассмотрения двух подслучаев:

а)  $0 \leq x < x_* \Rightarrow a - \text{ch}\nu(x) < 0$ ; тогда

$$\frac{\text{ch}\nu(x) - ar(x)}{\text{ch}\nu(x) - a} < 1 \Rightarrow \text{ch}\nu(x) - ar(x) < \text{ch}\nu(x) - a \Rightarrow r > 1.$$

б)  $x_* < x \leq l \Rightarrow a - \text{ch}\nu(x) > 0$ . В этом случае

$$\frac{ar(x) - \text{ch}\nu(x)}{a - \text{ch}\nu(x)} < 1 \Rightarrow ar(x) - \text{ch}\nu(x) < a - \text{ch}\nu(x) \Rightarrow r(x) < 1.$$

2.  $\omega > 1$ . Находим: а)  $0 \leq x < x_* \Rightarrow r(x) < 1$ ; б)  $x_* < x \leq l \Rightarrow r(x) > 1$ .

Эти особенности легко понять из рис. 10.

**7.2. Тип электризации и второй закон Ома.** Под вторым законом Ома подразумевается зависимость тока от межэлектродного расстояния, которая должна быть обратно пропорциональной при “точном” выполнении закона Ома.

Из дифференциального закона Ома в виде (96) следует, что эффективная удельная электропроводность (обозначим  $\sigma_f$ ), определяемая как коэффициент пропорциональности между током  $j$  (или  $I$ ) и средней напряженностью  $\bar{E} \equiv U/l$ , имеет вид

$$\sigma_f \equiv \sigma \cdot \frac{ar(x) - \text{ch}\nu(x)}{a - \text{ch}\nu(x)} \quad (103)$$

– выражение, сохраняющее постоянное значение при любых  $x$  из интервала  $0 \leq x \leq l$ .

Положим  $x = 0$  из области а). Получим  $r(0) \equiv r_s$ ;  $\nu(x)|_{x=0} = \mu$ . Следовательно,

$$\sigma_f = \sigma \cdot \frac{ar_s - \text{ch}\mu}{a - \text{ch}\mu} \equiv \sigma \cdot \frac{1 - r_s \cdot \Psi(\mu)}{1 - \Psi(\mu)}; \quad \Psi(\mu) \equiv \frac{\text{th}\mu}{\mu}. \quad (104)$$

Взяв производную из этого выражения, находим

$$\frac{1}{\sigma} \cdot \sigma'_f(\mu) = \frac{(1 - r_s) \cdot \Psi'(\mu)}{(1 - \Psi)^2}. \quad (105)$$

В случае гетерозарядов (кривая 2, рис. 10)  $r_s > 1$  ( $E_s > \bar{E}$ ) и учитывая  $\Psi'(\mu) < 0$ , приходим к выводу  $\sigma'_f(\mu) > 0$ , то есть о росте эффективной электропроводности  $\sigma_f$  с увеличением межэлектродного расстояния  $\mu \sim l$ , что согласуется с опытными данными (рис. 11,б).

Аналогично для второго полуинтервала положим в (104)  $x = l$ . Получим

$$\sigma_f = \sigma \cdot \frac{ar_0 - 1}{a - 1}, \quad r_0 \equiv r(l); \quad \nu(0) = 0 \Rightarrow \text{ch}\nu = 1.$$

Отсюда

$$\frac{\sigma'_f}{\sigma} = \frac{(1 - r_0)a'(\mu)}{(a - 1)^2}. \quad (106)$$

При гетерозарядке на втором интервале  $r(x) < 1 \Rightarrow r_0 < 1$ , но  $a'(\mu) = (\text{sh}\mu/\mu)' > 0$ , следовательно, согласно (106)  $\sigma'_f > 0$ . Итак, на всем интервале  $0 \leq x \leq l$  в случае гетерозарядки  $\sigma_f(\mu)$  растет с увеличением межэлектродного расстояния  $\mu \sim l$ .

Аналогичный анализ показывает, что для жидкостей, обладающих свойством гомоэлектризации ( $r < 1$  при  $0 \leq x < x_*$  и  $r > 1$  при  $x_* < x \leq l$ , рис. 10, кривая 3), закономерность  $\sigma_f(\mu)$  – противоположная, то есть  $\sigma_f$  убывает с ростом расстояния  $\mu$ , что также соответствует опытным зависимостям (рис. 12,б).

Что касается зависимости силы тока от межэлектродного расстояния, то она прямо пропорциональна  $\sigma_f$  и обратно пропорциональна  $\mu$ :  $I \sim \sigma_f(\mu)/\mu$ . При гетероэлектризации  $\sigma_f(\mu)$  растет с ростом  $\mu$ , но медленнее, чем первая степень  $\mu$  (знаменатель формулы для  $I$ ), поэтому ток будет убывать (рис. 11,а). В обоих случаях сила тока уменьшается с увеличением расстояния между электродами. Установленные теоретические закономерности согласуются с экспериментальными (рис. 11, 12).

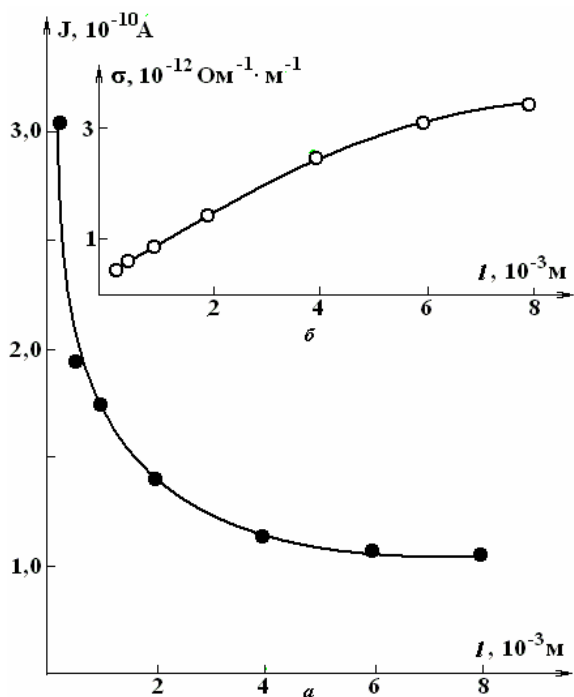


Рис. 11. Зависимости тока утечки и электропроводности от расстояния  $l$  в фреоне 113 при  $U=500$  В

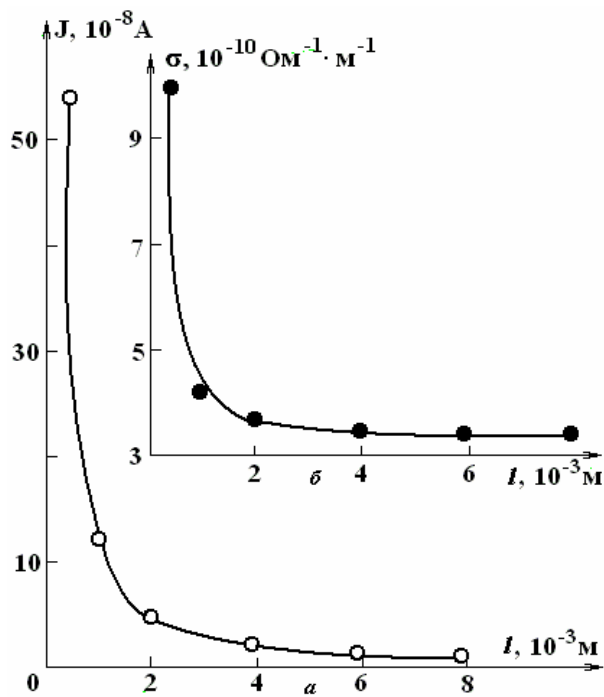


Рис. 12. Зависимости тока утечки и электропроводности от расстояния  $l$  в смеси бутилового спирта с трансформаторным маслом при  $U = 600$  В

### Выводы

1. Систематизированы экспериментальные исследования по электризации диэлектрических жидкостей под воздействием однородного внешнего электростатического поля. Установлены типы электризации.

2. Сформулирована общая задача электризации и рассмотрен ряд физико-математических моделей, объясняющих установленные типы электризации: гетерополярную, гомополярную, монополярную положительную, монополярную отрицательную, биполярные гомоструктуры и биполярные гетероструктуры.

3. Приведена программа численного моделирования процессов ионной проводимости применительно к зарядообразованию в плоском слое жидкости.

4. Проведен численный эксперимент по моделированию этих процессов для цилиндрической симметрии электродов. Установлено, что для этого случая также характерны биполярные приэлектродные структуры.

5. Рассмотрены задачи электризации во взаимосвязи с законом Ома и показано, что по зависимости эффективной удельной электропроводности от межэлектродного расстояния можно установить тип электризации: удельная электропроводность растет с расстоянием между электродами в случае гетероэлектризации, и наоборот при гомоэлектризации.

7. Проведенные исследования могут служить предпосылкой постановки и решения новых задач ЭГД об устойчивости механического равновесия (электроконвективная неустойчивость) и развитии ЭГД течений.

Статья выполнена при поддержке гранта РФФИ 06-08-91020-Мол/А и Академии наук Молдовы 06.13CRF.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Остроумов Г.А.* Взаимодействие электрических и гидродинамических полей. М.: Наука, 1979. с. 320.
2. *Болога М.К., Гросу Ф.П., Кожухарь И.А.* Электроконвекция и теплообмен. Кишинев: Штиинца, 1977. 320 с.
3. *Катцов Н.А.* Электрические явления в газах и в вакууме. М.: Гостехиздат, 1950. 527 с.
4. *Петриченко Н.А.* Электрический ветер в изолирующих жидкостях. Автореф. канд. дис. Л., 1973.

5. *Taris F., Quizonier R.* I. Phys. 35, № 6, 1110, 1964.
6. *Рычков Ю.М., Стишков Ю.К.* Напряженность электрического поля и объемный заряд в технических жидких диэлектриках // Коллоидный журнал. 1978. № 6.
7. *Стишков Ю.К., Остапенко А.А.* Электрогидродинамические течения в жидких диэлектриках. Л., 1989. с. 174.
8. *Мицкевич П.А., Казацкая Л.С.* Исследование распределения потенциала в жидких диэлектриках методом эффекта Керра // Электронная обработка материалов. 1968. № 2. С. 71–74.
9. *Гросу Ф.П., Болога М.К.* О биполярных структурах объемного заряда в слабопроводящей диэлектрической жидкости во внешнем электрическом поле // Электронная обработка материалов. 2007. № 1. С. 47–51.
10. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика сплошных сред. М., 1954.
11. *Onsager L.* Deviation from Ohm's law in Weak Electrolytes. // I. Chem. Phys. 1934. V. 2. P. 599–615.
12. *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Физ-мат. гиз, 1959.
13. *Сканави Г.И.* Физика диэлектрика (область сильных полей). М.; Л.: ГИИТЛ, 1949.
14. *Zhakin A.I.* Electrohydrodynamics: basic concepts, problems and applications. Kursk University Press, 1996.
15. *Гросу Ф.П., Болога М.К.* К вопросу объемной электризации слабопроводящей их диэлектриков // Электронная обработка материалов. 2005. № 6. С.
16. *Цырлин Л.А.* О нестационарных токах в телах с малой собственной проводимостью // Вопросы математической физики. Л.: Наука, 1976. С. 143–151.
17. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971.
18. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. М.: ГФМЛ., 1962.
19. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М.: Наука, 1977.
20. *Панкратьева И.Л., Полянский В.А.* Моделирование ЭГД течений в слабопроводящих жидкостях // ПМТФ, 1995. Т. 36. № 4. С. 36–44.
21. *Полянский В.А., Файзулин Р.Т., Панкратьева И.А., Сахаров В.И.* Численное моделирование электрогидродинамического течения в канале при наличии инъекции заряда в поток // Доклады IV международной конференции “Современные проблемы электрогидродинамики и электрофизики жидких диэлектриков”. СПб., 1996. С. 121–129.
22. *Mirotvorsky V.O., Stishkov Iu.K.* The structure and the properties of bipolar near-electrode layers in liquid dielectrics // Annual Report Conference on Electrical Insulation and Dielectric Phenomena. Atlanta, 1998. Vol. 2. P. 428–432.

*Поступила 16.08.07*

### **Summary**

Charge formation in the liquid dielectrics under the influence of electrostatic field is considered. Systematization of various types of electrization, their physical interpretation as well as mathematical description are presented. Mechanisms of electrization, which can be subdivided on equilibrium with and without taking into consideration diffusion currents, and non-equilibrium with and without taking into consideration diffusion currents, are discussed. It is shown that depending on media properties, external field and other factors one or another mechanism can be realized. Bipolar structures of space charge are explained, the results of numerical simulation of charge formation and current flow are given. Interconnection between media electrization and Ohm law is considered.