Ф.П. Гросу**, М.К. Болога*

# СТРУКТУРА ОБЪЕМНОГО ЗАРЯДА В СЛАБОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ КОНДЕНСАТОРЕ

** Институт прикладной физики АНРМ,*
*ул. Академией, 5, г. Кишинев, MD-2028, Республика Молдова*
***Государственный аграрный университет Молдовы,*
*ул. Мирчешть, 44, г. Кишинев, MD-2049, Республика Молдова*

Известно, что под воздействием внешнего электростатического поля слабопроводящая (диэлектрическая) жидкость теряет свою локальную электронейтральность [1], и, например, в плоскопараллельном конденсаторе возникает некоторое распределение зарядов с отличной от нуля объемной плотностью $\rho(x) \neq 0,$ координата $x$ отсчитывается в поперечном к слою жидкости направлении. По распределению $\rho(x)$ классически различают два типа объемной электризации жидкости: гетерозарядную, когда половины слоев заряжаются разноименно по отношению к прилегающим электродам, и гомозарядную, когда прилегающие к электродам полуслои заряжаются одноименно [2]. В обоих случаях проявляется монополярная структура заряда, то есть в пределах полуслоя межэлектродного промежутка знак заряда постоянен, следовательно, монотонна и напряженность поля в пределах полуслоев.

Однако экспериментально установлены так называемые биполярные структуры [3], когда в распределении напряженности поля $E(x)$ у электродов появляется максимум, что свидетельствует о том, что в пределах полуслоев возникают двойные структуры: слой, непосредственно прилегающий к электроду, заряжен одноименно с ним, а далее сменяется слоем противоположного знака. Такую структуру можно назвать биполярной гомозарядной. По результатам опытов [4] с меньшей вероятностью возможны и биполярные гетероструктуры с минимумами напряженностей у электродов.

Наряду с объяснением биполярных гомоструктур [3–5] авторами [6, 7] также предприняты попытки их объяснения, в частности [6] выдвинута гипотеза, по которой при повышении напряжения на слое и напряженности на поверхности электрода вследствие гетерополяризации при некотором критическом значении напряженности $E_{кр}$ могут произойти микропробой приэлектродного слоя (Дебая-Гюкелля) и его гомозарядка. При этом основным допущением считалось постоянство удельной электропроводности жидкости ($\sigma = \text{const}$), поэтому можно было рассчитывать лишь на качественное объяснение наблюдаемых распределений $E(x)$ [4]. В дальнейшем [7] отказавшиеся от данного предположения попытались выйти на точное решение уравнений Нернста-Планка (симметричный случай $k_\pm \equiv k;\ D_\pm \equiv D$):

$$\begin{cases} j_+ = k\rho_+E - D\rho'_+; \quad \rho = \rho_+ - \rho_-; \\ j_- = k\rho_-E + D\rho'_-; \quad \sigma = k(\rho_+ + \rho_-); \\ j'_+ = 0;\ j'_- = 0; \rho = \varepsilon E';\ j = j_+ + j_- = \text{const}, \end{cases} \tag{1}$$

где обозначения общеприняты, знаки ± относятся к положительным и отрицательным носителям заряда. Считая заданными $j_+ = \text{const},\ \ j_- = \text{const}$, неизвестными выступают $\rho_+, \rho_-, \rho, \sigma, E.$

Помимо допущения о симметрии свойств носителей зарядов $k_+ = k_- \equiv k;\ D_+ = D_- \equiv D$ в данной задаче наиболее существенным представляется допущение о сохранении парциальных токов в виде $div\vec{j}_+ = 0;\ \ div\vec{j}_- = 0,$ которое, однако, часто встречается и в электрохимии жидких растворов, когда для этого есть меньше оснований из-за больших концентраций носителей зарядов.

В работе [7] задача (1) была сведена к одному безразмерному уравнению типа Пенлеве [8], аналогично [1, 4]:

$$\eta'' = \pi_0\eta^3 + \pi_1\left(1 + \pi_2\left(1 - \xi\right)\right)\eta - \pi_3, \tag{2}$$

где введены обозначения для безразмерных комплексов:

$$\pi_0 = \left(\frac{lkE_0}{\sqrt{2D}}\right)^2;\ \ \pi_1 \equiv \frac{l^2}{\tau_* D}; \qquad \pi_2 \equiv \frac{lk\delta}{\sigma_* D};\ \ \pi_3 \equiv \frac{jl^3}{\varepsilon D E_0}, \tag{3}$$

причем

$$\tau_* \equiv \varepsilon/\sigma_*;\ \ \delta \equiv j_+ - j_-;\ \ \sigma_* \equiv \sigma_0 - \frac{\varepsilon k^2 E_0^2}{2D};\ \ \eta \equiv \frac{E}{E_0};\ \ \xi = \frac{x}{l}; \tag{4}$$

$l$ – ширина полуслоя; отсчет $x$ ведется от левой (положительной) обкладки конденсатора.

При этом следует заметить, что при полностью симметричной задаче, когда $j_+ = j_- \Rightarrow \delta = 0 \Rightarrow \pi_2 = 0,$ начальные условия к уравнению (2) очевидны:

$$E\left(x\right)\Big|_{x=l} = E_0;\ \ \ E'\left(x\right)\Big|_{x=l} = 0 \Rightarrow \eta\left(1\right) = \eta_0 = 1;\ \ \eta'\left(1\right) = \eta_0' = 0. \tag{5}$$

Если же $j_+ \neq j_-,$ то есть $\pi_2 \neq 0,$ то в качестве масштаба длины $l$ можно принять расстояние от левой обкладки не до середины слоя, а до плоскости, где $\varphi = 0$ или $\rho = 0$. Тогда условия (5) остаются в силе, однако в случае $\pi_2 = 0$ вместо (2) будем иметь

$$\eta'' = \pi_0\eta^3 + \pi_1\eta - \pi_3\,. \tag{6}$$

Это уравнение при условиях (5) допускает первое интегрирование, в результате которого получим

$$\eta'^2 = \frac{\pi_0}{2}\left[\left(\eta^2 + a\right)\left(\eta + 1\right) - b^2\right]\left(\eta - 1\right), \tag{7}$$

где

$$b^2 \equiv \frac{4\pi_3}{\pi_0};\ \ a \equiv \frac{2\pi_1}{\pi_0} + 1, \tag{8}$$

причем $a$ и $\pi_1$ могут быть как положительными, так и отрицательными.

В работе [7] установлено, что условиями существования биполярных решений уравнений (6), (7) является наличие у них по одному положительному корню, и они выполняются (правило Декарта), на основании чего сделан вывод о допустимости биполярных структур.

Данная работа является продолжением [7], как и предполагалось, состоит в окончательном решении задачи (7). Однако для сведения этого уравнения к табулированному эллиптическому интегралу необходимо найти положительный корень кубического уравнения в квадратных скобках. Обозначив этот корень через $\alpha > 0$ и подставив его в квадратные скобки (7), затем приравняв содержимое скобок к нулю, получим

$$b^2 = \left(\alpha^2 + a\right)\left(\alpha + 1\right) \geq 0. \tag{9}$$

Подставив правую часть (9) в (7) и поделив полученное выражение на $\eta - \alpha,$ найдем искомое разложение на множители:

$$\eta'^2 = \frac{\pi_0}{2}\left[\eta^2 + \left(\alpha + 1\right)\eta + \alpha\left(\alpha + 1\right) + a\right]\left(\eta - \alpha\right)\left(\eta - 1\right). \tag{10}$$

Для проверки знака трехчлена в квадратных скобках подставим $a$ из (9):

$$\eta^2 + \left(\alpha + 1\right)\eta + \alpha\left(\alpha + 1\right) + \frac{b^2}{\alpha + 1} - \alpha^2 = \eta^2 + \left(\alpha + 1\right)\eta + \alpha + \frac{b^2}{\alpha + 1} > 0,$$

так как $\eta > 0$, $\alpha > 0$. Следовательно, знак выражения (10) определяется знаком произведения $(\eta-\alpha)(\eta-1)$. Так как левая часть (10) представляет собой квадрат $\eta'^2 \geq 0$, то и правая должна быть неотрицательной, то есть должно быть

$$(\eta-\alpha)(\eta-1) \geq 0. \tag{11}$$

Равенство нулю дает тривиальный случай постоянства напряженности поля $E = \text{const}=E_0$ $(\eta = \eta_0 = 1)$. Знак строгого неравенства зависит от того $\alpha > 1$ или $\alpha < 1$. В первом случае решением (11) будут неравенства

$$\alpha > 1; \quad \eta \leq 1. \tag{12}$$

Во втором – противоположные:

$$0 < \alpha < 1; \quad \eta \geq 1. \tag{13}$$

С другой стороны, поскольку $\eta(1) = 1$ означает напряженность поля в середине слоя, то неравенства (12) и (13) означают соответственно монополярную гомоструктуру (выпуклая кривая $E(x)$) и монополярную гетероструктуру (вогнутая кривая $E(x)$). Таким образом, биполярных структур в точном решении не оказалось, а вышеприведенные условия о наличии положительных корней у уравнений (6), (7) оказались лишь необходимыми, ввиду чего вывод относительно существования биполярных структур оказался преждевременным.

Ниже приводим точное решение, для чего положительно определенную форму (10) представим в виде

$$\eta'^2 = \frac{\pi_0}{2}\left[(\eta-m)^2 + n^2\right](\eta-\alpha)(\eta-1), \tag{14}$$

где обозначено

$$m \equiv -\frac{\alpha+1}{2}; \quad n^2 \equiv \alpha(\alpha+1) + a - \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^2. \tag{15}$$

Интегрируя (14), находим

$$\int_\eta^1 \frac{d\eta}{\sqrt{(\eta-\alpha)(\eta-1)\left[(\eta-m)^2+n^2\right]}} = \pm\int_\xi^1 \sqrt{\frac{\pi_0}{2}}d\eta, \tag{16}$$

причем знак “+” соответствует гомозаряду, а “-” – гетерозаряду. Интеграл слева с точностью до множителя ($1/\sqrt{qp}$ ) является неполным эллиптическим интегралом I рода и согласно [9]:

$$\frac{1}{\sqrt{qp}} \cdot F(\varphi, k) = -\sqrt{\frac{\pi_0}{2}}(\xi - 1) = \sqrt{\frac{\pi_0}{2}} \cdot \lambda, \tag{17}$$

где $\lambda = 1 - \xi$ – координата, отсчитанная от центра ячейки (слоя) к поверхности электрода, $\varphi$ и $k$ (модуль интеграла) равны соответственно [9]:

$$\varphi \equiv 2arctg\sqrt{\frac{q}{p}\cdot\frac{\beta-\eta}{\alpha-\eta}}; \quad k \equiv \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(p+q)^2+(\alpha-\beta)^2}{pq}}; \tag{18}$$

$$p^2 \equiv (m-\alpha)^2 + n^2; \quad q^2 \equiv (m-\beta)^2 + n^2,$$

$\beta$ – верхний предел интеграла $F(\varphi, k)$ $(\beta = 1)$.

Из первой формулы (18) следует

$$\eta(\varphi) = \frac{\alpha\left(q\beta/p\alpha - \text{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right)}{q/p - \text{tg}^2\frac{\varphi}{2}}. \tag{19}$$

Формулы (17)–(19) дают точное аналитическое решение задачи. А именно по числовым значениям параметров $\pi_0, \alpha, \beta,$ $m, n$ формул (18) находим $p$, $q$ и $K$. Зная последние, по формуле (17) находим $F(\varphi, k)$ как функцию координаты $\lambda$:

$$F(\varphi, k) = \sqrt{\frac{\pi_0 qp}{2}}\lambda. \tag{20}$$

Далее по таблицам или графикам $F(\varphi, k)$ находим $\varphi$, а по формуле (19) – $\eta(\varphi)$, а более конкретно – $\eta\big(\varphi\big(F(\lambda)\big)\big)$.

В целях апробации развиваемых методов решения задачи рассмотрим конкретный числовой пример, который решим двумя способами: приближенно, разложением в ряд Тейлора, и точно с помощью эллиптического интеграла по описанной схеме.

Предварительно преобразуем исходное уравнение (6), поделив все его члены на $\pi_0$:

$$\frac{\eta''}{\pi_0} = \eta^3 + \left(\frac{\pi_*}{\pi_0} - 1\right)\eta - \frac{\pi_3}{\pi_0}; \quad \eta(1) = 1; \quad \eta'(1) = 0, \tag{21}$$

где

$$\pi_* = \frac{l^2}{\tau_0 D}; \quad \tau_0 = \varepsilon / \sigma_0. \tag{22}$$

Положим $\pi_0 = 1,$ а также ориентировочно примем $\pi_* / \pi_0 = 0{,}10;$ $\pi_3 / \pi_0 = 0{,}55.$ Тогда уравнение (21) будет иметь вид

$$\eta'' = \eta^3 - 0{,}9\eta - 0{,}55; \quad \eta(1) = 1; \quad \eta'(1) = 0. \tag{23}$$

Разлагая решение в ряд Тейлора с точностью до членов $(\xi - 1)^8$, находим:

$$\eta(\xi) \cong 1 - 0{,}2250 \cdot (\xi - 1)^2 - 0{,}0394(\xi - 1)^4 + 0{,}0023(\xi - 1)^6 + 0{,}0007 \cdot (\xi - 1)^8. \tag{24}$$

Расчеты по этой формуле запишем в таблицу.

Теперь рассмотрим точное решение, вычислив необходимые параметры:

$$a = 2 \cdot 0{,}1 - 1 = -0{,}8; \; b^2 = 4 \cdot 0{,}55 = 2{,}2.$$

Квадратные скобки в (7) приравниваем нулю для нахождения $\alpha$:

$$\eta^3 + \eta^2 - 0{,}8\eta - 3 = 0. \tag{25}$$

Численно определим положительный корень $\alpha = 1{,}3219$ . Определив по формулам (15) $m$ и $n^2$, из (14) получим

$$\eta' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\left[(\eta + 1{,}1610)^2 + 0{,}9215\right](\eta - 1{,}3219)(\eta - 1)}.$$

Вычислим параметры $p, q, k$ по формулам (18), где $m = -1{,}1610;$ $n^2 = 0{,}9215;$ $\alpha = 1{,}3219;$ $\beta = 1;$ $p = 2{,}6620;$ $q = 2{,}3846 \Rightarrow K \cong 0{,}99999 \simeq 1{,}0000.$ Из (19) находим

$$\eta(\varphi) = 1{,}3219 \cdot \frac{0{,}6720 - \mathrm{tg}^2 \dfrac{\varphi}{2}}{0{,}8883 - \mathrm{tg}^2 \dfrac{\varphi}{2}}. \tag{26}$$

Формула (20) примет вид

$$F(\varphi,1)=17741\cdot\lambda. \qquad (27)$$

По значениям $0\le\lambda\le 1$ и таблицам [10] находим сначала $F(\varphi,1)$, затем φ, а по формуле (26) – $\eta(\varphi)$. Данные отмечены в таблице.

*Таблица вычислений* $\eta(\lambda)$

| № | $\lambda$ | 0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\tilde{\eta}$ | 1,00 | 0,99 | 0,96 | 0,91 | 0,84 | 0,73 |
| 2 | $F(\varphi,1)$ | 0 | 0,35 | 0,71 | 1,06 | 1,42 | 1,77 |
| 3 | $\varphi^0$ | 0 | 20 | 37 | 52 | 63 | 69 |
| 4 | $\bar{\eta}$ | 1,00 | 0,99 | 0,96 | 0,89 | 0,77 | 0,64 |
| 5 | $\bar{\eta}$ | 1,00 | 0,99 | 0,97 | 0,88 | 0,77 | 0,59 |

Строка $\tilde{\eta}$ соответствует вычислениям по приближенной формуле (24), $\bar{\eta}$ – по формулам (25), (27).

Легко заметить, что при $k=1$ эллиптический интеграл выражается элементарной формулой, которая непосредственно вытекает из его определения в форме Лежандра:

$$F(\varphi,1)=\ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)\right]=1,7741\lambda. \qquad (28)$$

Откуда

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{e^{1,7741\lambda}-1}{e^{1,7741\lambda}+1}=th(0,8871\lambda).$$

Следовательно, из (25) имеем

$$\eta(\lambda)=1,3219\cdot\frac{0,6720-th^2(0,8871\lambda)}{0,8883-th^2(0,8871\lambda)}. \qquad (29)$$

В строке “5” таблицы приводятся значения $\bar{\eta}$, вычисленные по формуле (29). Расхождения в результатах, полученных различными путями, незначительны и проявляются в основном при больших λ, то есть вблизи электродов, где сходимость ряда Тейлора несколько ухудшается. В целом же приближенные формулы по методу разложения в ряд Тейлора с точностью до 6-го порядка включительно вполне приемлемы для расчетов.

Таким образом, были развиты два пути аналитического решения уравнений Нернста-Планка: приближенный, методом разложения в степенной ряд, и точный, методом эллиптических интегралов. Совпадение результатов вычислений позволяет заключить, что они приемлемы для решения задач о зарядообразовании в моделях указанных уравнений. Кроме того, установлено, что в рамках тех же моделей состоятельными оказываются классические гомозарядные и гетерозарядные распределения электрического поля в межэлектродном пространстве.

Дальнейшие поиски биполярных структур следует искать либо в направлении развития гипотезы о микропробое приэлектродного слоя [6, 7], либо в уравнениях Нернста-Планка с учетом несохранения парциальных токов ($div\vec{j}_+\ne 0;\ div\vec{j}_-\ne 0$). Еще одна возможность может оказаться скрытой в рассмотренной задаче (2), но с учетом асимметрии токов $j_+-j_-\ne 0\ \ (\pi_2\ne 0)$. С этой последней задачи целесообразно начать новые поиски механизмов зарядообразования, поскольку она является непосредственным обобщением предыдущей.

**Работа выполнена при поддержке гранта Академии наук Молдовы 06.13 CRF.**

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Остроумов Г.А.* Взаимодействие электрических и гидродинамических полей.

2. *Taris P.P., Guizonier P.* Phenomenes lies a la conductibilies des liquides isolante // I. Phys. Appl. N 6. 1964.
3. *Рычков Ю.М., Стишков Ю.К.* Напряженность электрического поля и объемный заряд в технических жидких диэлектриках // Коллоидный журнал. № 6. 1978.
4. *Стишков Ю.К., Остапенко А.А.* Электрогидродинамические течения в жидких диэлектриках. Изд-во ЛГУ, 1989. С. 174.
5. *Апфельбаум М.С., Полянский В.А.* Об образовании объемного заряда в слабопроводящих средах // Магнитная гидродинамика. № 1. 1982.
6. *Гросу Ф.П., Болога М.К.* Особенности электризации слабопроводящей жидкости во внешнем электрическом поле // Электронная обработка материалов. № 4. 2006. С. 37–46.
7. *Гросу Ф.П., Болога М.К.* О биполярных структурах объемного заряда в слабопроводящей диэлектрической жидкости во внешнем электрическом поле // Электронная обработка материалов. № 1. 2007. С. 47–51.
8. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971.
9. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы. 1962.
10. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М.: Наука, 1977.

*Поступила 28.05.07*

**Summary**

Appearance of a volume charge in weakly conducting liquid under the influence of external electrostatic field on the basis of Nernst Planck equations is considered. It is shown that under the symmetry conditions of the same electrical parameters of positive and negative charge carriers only hetero and homo charge distributions of the field are possible, whereas bipolar structures cannot exist. Possible ways of searching such structures are proposed.