С.О. Ширяева, А.И. Григорьев, П.В. Мокшеев

РАВНОВЕСНАЯ ФОРМА ЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ, ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ВОКРУГ СВОЕЙ ОСИ СИММЕТРИИ

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, 150000, Ярославль, Россия

1. Введение. Расчет равновесных форм вращающихся заряженных капель представляет интерес в изучении процессов в грозовых облаках, воронках смерчей и в других заряженных жидкокапельных системах естественного и искусственного происхождения [1–4]. Знание о равновесных формах капель в различных силовых полях необходимо для понимания физических закономерностей временной эволюции неустойчивых капель, механизмов реализации их неустойчивости и закономерностей распада при силовых воздействиях, а также для проведения аналитических асимптотических и численных расчетов нелинейных осцилляций подобных капель [4–7].

2. Постановка задачи. Пусть капля несжимаемой идеально проводящей жидкости с коэффициентом поверхностного натяжения σ, массовой плотностью ρ, несущая заряд Q, вращается с постоянной угловой скоростью Ω. Поставим цель в первом порядке малости по отношению амплитуды деформации исходной сферической формы капли, вызванной вращением, к радиусу R найти аналитическое выражение для равновесной формы капли в указанных условиях. Все рассмотрение проведем в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вместе с каплей, начало координат которой совпадает с центром масс капли, а полярный угол θ отсчитывается от положительного направления оси вращения. Исходить будем из условия баланса давлений на свободной поверхности капли, как это делалось в подобных расчетах в [8–9]. Всю систему, состоящую из вращающейся капли вместе с окружающим ее электрическим полем, будем считать замкнутой.

В силу очевидной осевой симметрии равновесной поверхности вращающейся капли будем искать ее форму в виде разложения по полиномам Лежандра $P_n(\mu)$:

$$r(\theta) = R + \xi(\theta) = R + \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\mu); \qquad \left(|\xi(\theta)|/R\right) \ll 1; \quad \mu \equiv \cos\theta, \tag{1}$$

полагая, что функция $\xi(\theta)$ описывает малую осесимметричную деформацию исходной сферической в отсутствие вращения формы капли.

В используемой модели несжимаемой жидкости изменение равновесной формы не должно приводить к изменению объема капли. Замкнутость системы позволяет утверждать, что центр масс капли при ее вращении вокруг оси симметрии, проходящей через центр масс, не будет изменять своего положения в пространстве. В итоге потребуем, чтобы форма равновесной поверхности капли удовлетворяла условиям неизменности объема и неподвижности центра масс:

$$\iiint_V dV = 2\pi \int_{-1}^{1} \int_{0}^{r(\theta)} r^2 \cdot dr\, d\mu = \frac{4}{3}\pi R^3;$$

$$\iiint_V \vec{r}\, dV = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} \int_{0}^{r(\theta)} \vec{e}_r \cdot r^3 \cdot dr\, d\mu\, d\varphi = 0,$$

которые позволяют найти ограничения снизу на спектр мод, принимающих участие в формировании равновесной формы свободной поверхности капли. Во втором из выписанных соотношений (в условии неподвижности центра масс капли) распишем орт радиальной переменной в виде разложения по ортам прямолинейной декартовой системы координат:

© Ширяева С.О., Григорьев А.И., Мокшеев П.В., Электронная обработка материалов, 2006, № 4, С. 46–52.

$$\vec{e}_r = \cos\theta \cdot \vec{e}_z + \sin\theta \cdot \cos\varphi \cdot \vec{e}_x + \sin\theta \cdot \sin\varphi \cdot \vec{e}_y \ ,$$

и, принимая проекции всего интегрального соотношения на орты $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$, получим три интегральных соотношения, из которых первых два (содержащих sin φ и cos φ) будут равны тождественно нулю, а третье примет вид

$$\iiint\limits_V \vec{r}\, dV = 2\pi \cdot \vec{e}_z \cdot \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{0}^{r(\theta)} \mu \cdot r^3 \cdot d\mu \cdot dr = 0.$$

Подставив в эти условия разложение (1) для $r(\theta)$ и ограничившись учетом слагаемых первого порядка малости $\sim |\xi(\theta)|/R$, придем к соотношениям:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \int\limits_{-1}^{1} P_n(\mu)\, d\mu = 0 \ ;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \int\limits_{-1}^{1} P_n(\mu) \cdot \mu \cdot d\mu = 0 \ .$$

Из первого выписанного соотношения из-за ортогональности полиномов Лежандра следует, что амплитуды $A_0 = 0$. Из второго интегрального соотношения ввиду $\mu \equiv P_1(\mu)$ и ортогональности полиномов Лежандра следует: $A_1 = 0$. В итоге в выражении (1) для равновесной поверхности капли $r(\theta)$ суммирование начинается с индекса $n = 2$:

$$r(\theta) = R + \xi(\theta) = R + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \cdot P_n(\mu) \ . \tag{2}$$

3. Сравнение порядков малости величины давления центробежных сил и амплитуды деформации свободной поверхности. В условиях равновесия на свободной поверхности капли выполняется условие баланса давлений:

$$p - p_{\text{атм}} + p_{\Omega} + p_Q = p_{\sigma}, \tag{3}$$

которое и определяет форму равновесной поверхности (форму капли). В (3) p − давление жидкости внутри капли; $p_{\text{атм}}$ – атмосферное давление; p_{Ω} – давление центробежных сил; p_Q – давление электростатического поля собственного заряда капли; p_{σ} – давление сил поверхностного натяжения.

В отсутствие вращения все действующие на каплю силы обладают центральной симметрией и равновесная форма капли является сферической. Вращение капли относительно оси, проходящей через центр масс, приводит к появлению давления осесимметричных центробежных сил p_{Ω} на поверхность капли и к искажению ее сферической формы, которая из центрально симметричной становится осесимметричной. Примем, что угловая скорость вращения невелика и давление центробежных сил по сравнению с давлением сил поверхностного натяжения под невозмущенной сферической поверхностью капли (которое в естественных для решаемой задачи безразмерных переменных, когда $R = \rho = \sigma = 1$, определяет масштаб измерения давления) мало. Тогда амплитуда деформации капли под действием сил центробежного давления должна иметь такой же порядок малости, то есть

$$|\xi| \sim p_{\Omega} \cdot$$

В самом деле, изменение потенциальной энергии ΔW капли при малой деформации ее начальной сферической формы пропорционально квадрату амплитуды деформации (см., например, [10–11]):

$$\Delta W \sim |\xi|^2 \cdot \tag{4}$$

С другой стороны, изменение потенциальной энергии можно представить как работу сил давления по деформированию капли в виде интеграла:

$$\Delta W = \int_0^{\xi(\theta)} (p - p_{\text{атм}} + p_{\Omega} + p_Q - p_{\sigma}) \cdot S(\xi) \cdot d\xi. \tag{5}$$

Здесь $S(\xi)$ − площадь поверхности деформированной капли.

Представим входящие в это выражение давления в виде сумм давлений на поверхность невозмущенной (не вращающейся) капли, которые обозначим верхним индексом “0”, и поправок, возникших при наличии вращения:

$$p \approx p^{(0)} + p^{(1)}\ ; \qquad p_\Omega \approx p_\Omega^{(1)}\ ; \qquad p_Q \approx p_Q^{(0)} + p_Q^{(1)}\ ; \qquad p_\sigma \approx p_\sigma^{(0)} + p_\sigma^{(1)}. \tag{6}$$

Учтем также, что изменение площади поверхности капли при малой деформации $\xi(\theta)$ согласно [10−11] пропорционально квадрату амплитуды деформации:

$$\Delta S \equiv S - S^{(0)} \equiv S - 4\pi R^2 \sim |\xi|^2. \tag{7}$$

Подставив (6), (7) в (5), в первом порядке малости получим

$$\Delta W = 4\pi R^2 \int_0^{\xi(\theta)} (p^{(1)} + p_\Omega^{(1)} + p_Q^{(1)} - p_\sigma^{(1)}) \cdot d\xi, \tag{8}$$

где учтено, что

$$p_\Omega^{(0)} \equiv 0; \qquad p^{(0)} - p_{\text{атм}} + p_Q^{(0)} - p_\sigma^{(0)} \equiv 0.$$

Сравнивая (8) с (4), несложно убедиться, что

$$(p^{(1)} + p_\Omega^{(1)} + p_Q^{(1)} - p_\sigma^{(1)}) \sim \xi. \tag{9}$$

Полученная оценка означает, что деформация свободной поверхности капли под действием центробежного давления имеет тот же порядок величины, что и само давление:

$$\xi \sim p_\Omega^{(1)},$$

поскольку остальные величины в (9) – $p^{(1)}$, $p_Q^{(1)}$, $p_\sigma^{(1)}$ – пропорциональны величине деформации поверхности [11].

В итоге эти выражения можно записать в виде асимптотических выражений:

$$p = p^{(0)} + p^{(1)} + O(\xi^2)\ ; \qquad p_\Omega = p_\Omega^{(1)} + O(\xi^2)\ ;$$

$$p_Q = p_Q^{(0)} + p_Q^{(1)} + O(\xi^2)\ ; \qquad p_\sigma = p_\sigma^{(0)} + p_\sigma^{(1)} + O(\xi^2)\ . \tag{10}$$

4. Определение компонент давлений различных порядков малости на поверхности капли. Подставив разложения (10) в уравнение баланса давлений (3) и собрав вместе слагаемые одного порядка малости, потребуем выполнения баланса давлений в каждом из порядков отдельно. Нулевой порядок малости определит баланс давлений на свободной поверхности заряженной сферической капли в отсутствие вращения. Баланс давлений первого порядка малости позволит рассчитать амплитуды A_n в выражении (2).

Получим отдельно для каждого из входящих в (3) давлений явные выражения в виде суперпозиции компонент нулевого и первого порядков малости.

4а. Давление сил поверхностного натяжения определяется через орту нормали $\vec{n}$ к поверхности (1) по известным формулам:

$$r = r(\theta): \quad p_\sigma = \sigma \cdot div\,\vec{n}\ ; \quad \vec{n} = \frac{\nabla(r - r(\theta))}{|\nabla(r - r(\theta))|}.$$

Подставляя в эти формулы разложение (2) и ограничиваясь слагаемыми первого порядка малости, получаем выражение для орта нормали к поверхности (2)

$$r = r(\theta): \quad \vec{n} = \vec{e}_r - \vec{e}_\theta \frac{1}{R}\frac{\partial \xi(\theta)}{\partial \theta}$$

и для компонент давления сил поверхностного натяжения

$$p_\sigma \simeq p_\sigma^{(0)} + p_\sigma^{(1)} \equiv \sigma \cdot div\left(\vec{e}_r - \vec{e}_\theta \frac{1}{R}\frac{\partial \xi(\theta)}{\partial \theta}\right)_{R+\xi(\theta)} \equiv$$

$$\equiv \sigma \cdot \left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2) - \frac{1}{r \cdot \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta \frac{\partial \xi(\theta)}{\partial \theta})\right]_{R+\xi(\theta)} \equiv$$

$$\equiv \sigma \cdot \left[\frac{2}{R + \xi(\theta)} - \frac{1}{[R + \xi(\theta)]}\frac{\partial}{\sin\theta \cdot \partial\theta}(\sin\theta \frac{\partial \xi(\theta)}{\partial \theta})\right] \cong$$

$$\cong \frac{2\sigma}{R} - \frac{\sigma}{R}\left[\frac{2}{R} - \frac{1}{R \cdot \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta})\right] \cdot \xi(\theta),$$

или

$$p_\sigma^{(0)} = \frac{2\sigma}{R}\;; \qquad p_\sigma^{(1)} = \frac{\sigma}{R^2}\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)(n+2)\cdot A_n\cdot P_n(\mu). \tag{11}$$

4б. Давление, вызванное вращением капли вокруг своей оси, как уже отмечалось ранее, имеет первый порядок малости по ξ и определяется на невозмущенной сферической поверхности капли (поскольку поправка, вызванная деформацией свободной поверхности капли, будет иметь более высокий порядок малости) выражением [12]:

$$p_\Omega = \int_0^{R\cdot\sin\theta}\rho\Omega^2 x dx \equiv \frac{1}{2}\rho\,\Omega^2 R^2\cdot\sin^2\theta \equiv \frac{1}{3}\rho\,\Omega^2 R^2\cdot(P_0(\mu)-P_2(\mu)). \tag{12}$$

4с. Давление электрического поля собственного заряда на равновесную поверхность капли выражается через потенциал электрического поля φ:

$$r = r(\theta): \qquad p_Q = \frac{1}{8\pi}E^2 = \frac{1}{8\pi}(\nabla\varphi)^2. \tag{13}$$

Чтобы получить для него разложение типа (10), необходимо решить краевую задачу для электростатического потенциала φ, состоящую из уравнения Лапласа

$$\Delta\varphi = 0,$$

условия убывания решения на бесконечности и условия эквипотенциальности поверхности капли

$$r\to\infty:\ \ \varphi\to 0\ ;\ \ r = r(\theta):\ \varphi = \varphi_S,$$

а также и условия постоянства полного заряда капли Q

$$r = r(\theta):$$

$$2\pi\int_{-1}^{1}\frac{(\vec{n}\bullet\nabla\varphi)}{(\vec{e}_r\bullet\vec{n})}\cdot r^2 d\mu = -4\pi Q,$$

где φ_S – потенциал поверхности капли.

Подставляя в сформулированную краевую задачу для нахождения потенциала φ разложение:

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + O(\xi^2), \tag{14}$$

получаем краевые задачи для определения каждой из составляющих φ.

Задача нулевого порядка малости имеет вид

$$\Delta\varphi^{(0)} = 0;$$

$$r\to\infty:\ \varphi^{(0)}\to 0;\ \ r = R:\varphi^{(0)} = \varphi_S^{(0)}\ ;$$

$$r = R:\ \int_{-1}^{1}\frac{d\varphi^{(0)}}{dr}R^2 d\mu = -2Q\ . \tag{15}$$

Задача первого порядка малости запишется в виде

$$\Delta\varphi^{(1)}(\vec{r}) = 0;$$

$$r\to\infty:\ \varphi^{(1)}(\vec{r})\to 0;\quad r = R:\quad \varphi^{(1)}(\vec{r}) + R\frac{\partial\varphi^{(0)}(\vec{r})}{\partial r}\cdot\xi(\theta) = \varphi_S^{(1)};$$

$$r = R:\ \int_{-1}^{1}\left[\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial r} + \left(2\frac{\partial\varphi^{(0)}}{\partial r} + R\frac{\partial^2\varphi^{(0)}}{\partial r^2}\right)\xi(\theta)\right]R^2 d\mu = 0\ . \tag{16}$$

Согласно (15)–(16) величины $\varphi^{(0)}(\vec{r})$ и $\varphi^{(1)}(\vec{r})$ являются исчезающими на бесконечности решениям уравнений Лапласа, и, следовательно, выражения для них можно записать в виде

$$\varphi^{(0)}(\vec{r}) = \sum_{n=0}^{\infty}B_n\cdot r^{-(n+1)}P_n(\mu);\qquad \varphi^{(1)}(\vec{r}) = \sum_{n=0}^{\infty}D_n\cdot r^{-(n+1)}\cdot P_n(\mu). \tag{17}$$

Постоянные коэффициенты B_n и D_n в разложениях (17) определяются из граничных условий краевых задач (15)–(16).

В силу центральной симметрии задачи нулевого порядка, описывающей равновесное состояние не вращающейся не деформированной сферической капли, потенциал $\varphi^{(0)}(\vec{r})$ может быть функцией только радиальной координаты *r*. Следовательно, в разложении (17) только коэффициент

B_0 отличен от нуля. Из условия эквипотенциальности нулевого порядка (15) находим $B_0 = \varphi_S^{(0)} \cdot R$. Выражение для потенциала нулевого порядка примет вид $\varphi^{(0)}(\vec{r}) = \varphi_S^{(0)} \, R/r$.

Условие постоянства заряда капли (15) позволяет определить потенциал поверхности $\varphi_S^{(0)} = Q/R$ и записать выражение для компоненты потенциала нулевого порядка в окончательном виде:

$$\varphi^{(0)}(\vec{r}) = \frac{Q}{r}. \tag{18}$$

Подставляя решение (18), разложения (2) и (17) для функций $\xi(\theta)$ и $\varphi^{(1)}(\vec{r})$ в условие эквипотенциальности поверхности капли, записанное для первого порядка малости (16), получаем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_n \cdot R^{-(n+1)} \cdot P_n(\mu) - \frac{Q}{R} \sum_{n=2}^{\infty} A_n \cdot P_n(\mu) = \varphi_S^{(1)}.$$

Учитывая свойство ортогональности полиномов Лежандра, для коэффициентов D_n находим

$$D_0 = \varphi_S^{(1)} R; \qquad D_1 = 0; \qquad D_n = \frac{Q}{R} \cdot A_n \cdot R^{(n+1)} \quad (\forall n \geq 2)$$

В итоге для потенциала $\varphi^{(1)}(\vec{r})$ получим

$$\varphi^{(1)} = \varphi_S^{(1)} \frac{R}{r} + \frac{Q}{R} \sum_{n=2}^{\infty} A_n \left(\frac{R}{r}\right)^{(n+1)} P_n(\mu).$$

Появление потенциала поверхности $\varphi_S^{(1)}$ определяется из условия постоянства заряда капли, записанного для первого порядка малости (16), которое после подстановки в него (18) для $\varphi^{(0)}(\vec{r})$ существенно упрощается:

$$r = R: \int_{-1}^{1} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial r} R^2 d\mu = 0.$$

В результате несложно получить $\varphi_S^{(1)} = 0$ и записать выражение для компоненты потенциала первого порядка в окончательном виде:

$$\varphi^{(1)} = \frac{Q}{R} \sum_{n=2}^{\infty} A_n \left(\frac{R}{r}\right)^{(n+1)} P_n(\mu). \tag{19}$$

Давление электростатического поля (13) с учетом (14) и выражения (2) принимает вид

$$r = R: \; p_Q \approx p_Q^{(0)} + p_Q^{(1)} = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{d\,\varphi^{(0)}}{d\,r}\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \left[\frac{d\,\varphi^{(0)}}{d\,r} \left(R\,\xi(\theta) \frac{d^2\,\varphi^{(0)}}{d\,r^2} + \frac{d\,\varphi^{(1)}}{d\,r} \right) \right].$$

Воспользовавшись решениями (18) и (19), для искомых компонент давления электрического поля получим следующие выражения:

$$p_Q^{(0)} = \frac{Q^2}{8\pi R^4}; \quad p_Q^{(1)} = \frac{Q^2}{4\pi R^4} \sum_{n=2}^{\infty} A_n \cdot (n-1) \cdot P_n(\mu). \tag{20}$$

5. Расчет равновесной формы капли из баланса давлений. Коэффициенты A_n в формуле для формы равновесной поверхности (2) вычислим, подставляя полученные выражения для компонент давлений (11), (12), (20) в условие баланса давлений (3), приравнивая слагаемые одинакового порядка малости и используя ортогональность полиномов Лежандра.

В нулевом порядке получим равенство, описывающее баланс давлений на поверхности заряженной сферической капли в отсутствие вращения и позволяющее определить равновесное давление внутри капли:

$$p^{(0)} = \frac{2\sigma}{R} - \frac{Q^2}{8\pi R^4} + p_{atm}.$$

Баланс давлений на поверхности капли, записанный в первом порядке малости, имеет вид

$$p_{\sigma}^{(1)} = p^{(1)} + p_{Q}^{(1)} + p_{\Omega}.$$

После подстановки выражений (11), (12) и (20) получим:

$$-\frac{\sigma}{R}\sum_{n}(2-n(n+1))A_n\cdot P_n(\mu) = p^{(1)}\cdot P_0(\mu)+\frac{Q^2}{4\pi R^4}\sum_{n=2}^{\infty}A_n(n-1)\cdot P_n(\mu)+$$
$$+\tfrac{5}{6}\rho\Omega^2\cdot R^2\cdot P_0(\mu)-\tfrac{1}{3}\rho\Omega^2\cdot R^2\cdot P_2(\mu).$$

Собирая слагаемые при полиномах Лежандра одинакового порядка и приравнивая каждую из таких сумм нулю в силу ортогональности функций $P_n(\mu)$, получаем при $n = 0$ поправку к давлению внутри капли, возникающую вследствие вращения,

$$p^{(1)} = -5\rho\cdot\Omega^2\cdot R^2/6,$$

а при $n \geq 2$ – коэффициенты A_n в разложении (3):

$$A_2 = -\frac{4\pi}{3}\frac{\rho\Omega^2R^6}{\left(16\sigma R^3\pi - Q^2\right)};\quad A_n = 0\quad (\forall n>2).$$

Согласно полученным соотношениям первый порядок малости имеет лишь коэффициент при полиноме Лежандра $P_2(\mu)$, в то время как коэффициенты при всех остальных полиномах равны 0. В результате равновесная форма поверхности капли запишется в виде

$$r(\theta)\approx R\left(1-\frac{4\pi}{3}\frac{\rho\Omega^2R^6}{\left(16\sigma R^3\pi-Q^2\right)}P_2(\mu)\right). \tag{21}$$

Из сравнения выражения (21) с разложением в ряд по эксцентриситету e уравнения сфероидальной поверхности, выписанного в сферических координатах

$$r_{sph} = R\left(1+e^2P_2(\mu)/3\right)+\mathrm{O}\left(e^4\right)$$

следует, что равновесную форму поверхности заряженной капли, вращающейся вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью Ω, можно считать сплюснутым сфероидом с точностью до слагаемых $\sim e^2$, эксцентриситет которого связан с зарядом капли и скоростью вращения соотношением

$$e^2 = \frac{\rho\Omega^2R^3}{4\sigma(1-W)}, \tag{22}$$

где $W \equiv Q^2/16\pi\sigma R^3$ – параметр Рэлея, характеризующий устойчивость поверхности капли по отношению к заряду (критическое значение параметра W=1).

Из соотношения (22) видно, что увеличение скорости вращения капли и заряда приводит к росту эксцентриситета, то есть к увеличению сфероидальной деформации равновесной поверхности капли. Область применимости полученного выражения определяется условием

$$e^2 \equiv \frac{\rho\Omega^2R^3}{4\sigma(1-W)} \ll 1. \tag{23}$$

Соотношение (23) определяет ограничение на величины угловой скорости вращения, заряд и радиус капли, при которых форму заряженной вращающейся капли можно считать близкой к сплюснутому сфероиду. Поскольку в жидко-капельных аэродисперсных системах радиусы капель, как правило, не превышают десятки микрометров, то угловые скорости вращения, при которых условие (23) выполняется, могут достигать тысячи оборотов в секунду при любых достижимых в заряженных облаках естественного происхождения зарядах капли [13].

Из проведенных исследований закономерностей реализации неустойчивости свободной поверхности капли в отсутствие вращения по отношению к собственному заряду [14–15] известно, что ее начальная стадия связана с деформацией изначально сферической капли к фигуре, близкой к вытянутому сфероиду. В ситуации вращающейся заряженной капли можно ожидать, что развитие неустойчивости будет связано с деформацией её поверхности к трехосному сфероиду по схеме, описанной в [16–17].

6. Заключение. Равновесную форму заряженной вращающейся капли в широком диапазоне угловых скоростей и зарядов капли можно аппроксимировать сфероидом, сплюснутым вдоль оси вращения.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №06-01-00066-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Григорьев А.И., Григорьев О.А.* О влиянии вращения и электрического заряда на устойчивость сферической капсулы // Электронная обработка материалов. 1991. № 3. С. 41–44.
2. *Григорьев А.И., Синкевич О.А.* О природе электрических явлений в воронке смерча // ЖТФ. 1986. Т.56. Вып.10. С.1985–1987.
3. *Grigor'ev A.I., Shiryaeva S.O.* The possible physical mechanism of initiation and growth of lightning // Physica Scripta. 1996. V.54. P.660–666.
4. *Brown R.A., Scriven L.E.* The shape and stability of rotating liquid drop // Proc. R. Soc., London, 1980. V.A371. P.331–357.
5. *Natarajan R., Brown R.A.* Third-order resonance effects and the nonlinear stability of drops oscillations // J. Fluid Mech. 1987. V.183. P.95–121.
6. *Natarajan R., Brown R.A.* The role of three-dimensional shapes in the break-up charged drops // Proc. R. Soc. London, 1987. V.A410. P.209–227.
7. *Trinch E., Wang T.G.* Large amplitude free and driven drop-shape oscillations: experimental observations // J. Fluid Mech. 1982. V.122. P.315–338.
8. *Brazier-Smith P.R.* Stability and shape of isolated and pairs of water drops in an electric field // Phys. Fluids. 1971. V.14. № 1. P. 1–6.
9. *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белавина Е.И.* Равновесная форма заряженной капли в электрическом и гравитационном полях // ЖТФ. 1989. Т.59. Вып.6. С. 27–34.
10. *Стретт Дж. В. (Лорд Рэлей).* Теория звука. Т.2. М: Гостехтеориздат. 1955. 475 с.
11. *Hendrics C.D., Schneider J.M.* Stability of conducting masses charged with electricity // J. Amer. Phys. 1963. V.1. №6. P.450–453.
12. *Аппель П.* Фигуры равновесия вращающейся жидкости. Л.-М.: Главная редакция общетехнической литературы. 1936. 375 с.
13. *Мазин И.П., Хргиан А.Х., Имянитов И.М.* Облака и облачная атмосфера. Справочник. Л.: Гидрометеоиздат, 1989. 647 с.
14. *Григорьев А.И.* О механизме неустойчивости заряженной проводящей капли // ЖТФ. 1985. Вып.7. С.1272–1278.
15. *Григорьев А.И.* Неустойчивости заряженных капель в электрических полях (обзор) // Электронная обработка материалов. 1990. № 6. С. 23–32.
16. *Григорьев А.И., Фирстов А.А.* Критические условия неустойчивости заряженной капли, имеющей форму сплюснутого сфероида // Электронная обработка материалов. 1992. № 6. С. 20–23.
17. *Щукин С.И., Григорьев А.И.* Устойчивость заряженной капли, имеющей форму трехосного эллипсоида // ЖТФ. 1998. Т.68. Вып.11. С. 48–51.

Поступила 12.04.06

Summary

On the principle of pressure balance on free surface of liquids the equilibrium form of a charged drops rotating about own axis of symmetry is analytically calculated. The calculated drops form is oblate spheroid.