

МОДЕЛЬ ПОЛЕЙ ВЛАЖНОСТИ, ТЕМПЕРАТУРЫ И ПОСТОЯННОГО ТОКА В ГРУНТЕ

*Государственный гидрологический институт,
2-я линия В.О., д. 23, С.-Петербург, 199053, Россия

**Foripex OY, Niskapietiläntie 1425, 56640 Purnujärvi, Finland

Введение. Совместное изучение полей влажности, температуры и постоянного тока актуально при решении многих практических приложений, в частности:

- при работе передач постоянного тока (работа электродов заземления);
- при осушении и закреплении грунтов методом электрообработки [1];
- при очистке грунтов от загрязнителей различной природы на основе использования электрокинетической методики [2].

При протекании постоянного тока в грунте возникает электроосмотический перенос влаги, что, в свою очередь, приводит к изменению распределения влажности в грунте, его параметров (влажности, удельного электрического сопротивления и его удельной теплоемкости), а также температуры и потенциала электрического поля. Эти явления влияют на условия работы электродов-заземлителей и на величину интегральных параметров: сопротивления растеканию тока, полного тока (при работе источника постоянного тока в режиме стабилизации по напряжению) или напряжения между электродами (при работе в режиме стабилизации по току). Проектирование электродов и обоснование режимов работы установок постоянного тока требуют знания распределения параметров, характеризующих процессы, происходящие в грунте.

Математическая модель. Расчет полей влажности, температуры и постоянного тока сводится к решению системы нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla \varphi \right) = 0, \quad (1)$$

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot \vec{q}_T + \frac{1}{\rho} (\nabla \varphi)^2, \quad (2)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \nabla \cdot \vec{q}_h + \nabla \cdot \vec{q}_E + \nabla \cdot \vec{q}_{TE}, \quad (3)$$

где W, T, φ – объемная влажность, температура и потенциал электрического поля; t – время; ρ – удельное электрическое сопротивление грунта, зависящее от влажности и температуры; $c = d_s c_s + d_w c_w$ – удельная объемная теплоемкость грунта (d_s, d_w – плотности сухого грунта и влаги, c_s, c_w – удельные теплоемкости сухого грунта и влаги); q_h, q_E, q_{TE} – удельные потоки влаги, вызываемые напором давления h , электроосмосом и термоосмосом; q_T – удельный кондуктивный поток тепла. Удельные потоки определяются формулами:

$$\vec{q}_h = k_h \nabla h, \quad \vec{q}_E = k_E \nabla \varphi, \quad \vec{q}_{TE} = k_{TE} \nabla T, \quad \vec{q}_T = \lambda \nabla T, \quad (4)$$

где k_h, k_E, k_{TE} – коэффициенты влагопроводности, электроосмоса и термоосмоса; λ – коэффициент теплопроводности грунта.

Все коэффициенты, входящие в уравнения (1)–(4), фактически являются функциями координат и времени, так как распределения влажности и температуры изменяются во времени. Далее анализ проводится для грунта, параметры которого в начальный момент времени не зависят от координат, а при протекании тока являются функцией одной координаты. Это возможно при достаточно большом заглублении в однородный грунт электрода, поверхность которого может быть аппроксимирована

одной из трех моделей: пластиной бесконечных размеров, сферой, цилиндром. Координата, от которой зависят все функции, совпадает с нормалью n к поверхности электрода S (x -пластина, R -сфера, r -цилиндр). Дифференциальные операторы, входящие в уравнения (1)–(4), определяются выражениями, представленными в табл.1.

Граничные условия для уравнений (1)–(3) :

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_S = \rho j|_S, \quad \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_S = 0, \quad \left. \frac{\partial W}{\partial n} \right|_S, \quad (5)$$

где S – поверхность электрода; $n = x, R, r$ – нормаль к поверхности пластины, сферы и цилиндра.

Таблица 1. Выражения для дифференциальных операторов

№	Модель	Дифференциальные операторы ($q = q_E, q_h, q_{TE}, q_T$)
1	Пластина	$\nabla \cdot \vec{q} = \frac{\partial q_x}{\partial x}, \quad (\nabla \varphi)^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2, \quad \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla \varphi \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)$
2	Сфера	$\nabla \cdot \vec{q} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 q_R), \quad (\nabla \varphi)^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial R} \right)^2, \quad \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla \varphi \right) = \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right)$
3	Цилиндр	$\nabla \cdot \vec{q} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r q_r), \quad (\nabla \varphi)^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2, \quad \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla \varphi \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)$

Начальные условия для уравнений (2)–(3):

$$T|_{t=0} = T_0, \quad W|_{t=0} = W_0, \quad (6)$$

где T_0, W_0 – начальные температура и влажность грунта.

Удельный поток влаги, определяемый давлением, представляется модифицированным уравнением Дарси:

$$q_h = k_h \frac{\partial h}{\partial W} \frac{\partial W}{\partial n}. \quad (7)$$

Водно-физические и теплофизические характеристики грунта определяются экспериментальным путем. Методы определения этих характеристик разработаны в [3, 4]. Электрофизические характеристики грунта также определяются экспериментальным путем [5]. Сводка формул для характеристик грунта (переменных коэффициентов, входящих в уравнения (1)–(4)) представлена в табл. 2. В формулах имеется зависимость от следующих параметров водонасыщенного грунта: k_0, λ_0, d_0 – коэффициента фильтрации, коэффициента теплопроводности и плотности грунта. Экспериментальные коэффициенты определяются при реперных значениях давления грунтовой влаги h_1, h_2 . Удельное электрическое сопротивление аппроксимируется зависимостью от двух параметров (T, W), а остальные коэффициенты – от одного (W).

Таблица 2. Аппроксимационные формулы для определения характеристик грунта

Формулы	Параметры
$k_h(W) = k_0 \left(\frac{W}{p} \right)^{2\gamma+2}$ $k_E^{(w)} = k_{E0} \left(\frac{W}{p} \right)^{2\gamma+2}$	$p = 1 - \frac{d_s}{d_0}, \quad \gamma = \frac{\ln \left(\frac{h_1}{h_2} \right)}{\ln \left(\frac{W_2}{W_1} \right)}$
$k_T(W) = b h k_h$	$h = h_2 \left(\frac{W}{W_2} \right)^\gamma, \quad b$ определяется экспериментально
$\lambda(W) = \lambda_0 \exp(\alpha(1 - \frac{W}{p}))$	α определяется экспериментально
$\rho(W, T) = \rho_0 \exp(k_1(1 - \frac{T}{20})) \left(\frac{W}{p} \right)^{k_2}$	k_1, k_2 определяются экспериментально

Поток влаги вследствие термоосмоса необходимо учитывать при очень высоких температурах грунта, поэтому формула для его определения не представлена в табл. 2 и далее это явление не учитывается.

Численный анализ. Для численных экспериментов приняты условия работы глубинного заземлителя (анода), расположенного в суглинке. Уравнения (2)–(3) аппроксимировались системой линейных разностных уравнений по так называемой неявной консервативной схеме, которая решалась методом прогонки. Значения параметров грунта даны в табл. 3.

Таблица 3. Параметры грунта

W_1, W_2 , долей объема	h_1, h_2 , см водного столба	k_0 , м/с	λ_0 , Вт/(м·С°)	d_s, d_0 , кг/м ³	ρ_0 , Ом·м	b , 1/С°	k_1, k_2	α	k_{E0} , м ² /(В·с)
0,40 0,25	22 330	$5 \cdot 10^{-8}$	1,3	1500 2500	20	0,002	0,3 3	2,3	$5 \cdot 10^{-9}$

Проверка работоспособности математической модели для сферического электрода выполнена с использованием частных решений уравнений (1), (2) для стационарных условий:

$$\varphi(R) = \rho_0 j_0 \frac{R_0^2}{R}, \quad T(R) = T(R_0) - \frac{j_0^2 \rho_0 R_0^2 (R - R_0)^2}{2 \lambda_0 R^2}, \quad (8)$$

где j_0, R_0 – плотность тока на поверхности электрода и его радиус.

При $R \rightarrow \infty, T \rightarrow T_0$, где T_0 – начальная температура грунта. Стационарное значение превышения температуры поверхности электрода над начальной температурой грунта определяется известной формулой [6]:

$$\Delta T = T(R_0) - T_0 = \frac{j_0^2 \rho_0 R_0^2}{2 \lambda_0} = \frac{\varphi_0^2}{2 \lambda_0 \rho_0}, \quad (9)$$

где $\varphi_0 = \varphi(R_0)$ – потенциал поверхности электрода.

Численные расчеты распределения температуры (без учета влагопереноса) сопоставлены со стационарным решением. Выход на стационарный режим осуществляется либо увеличением расчетного интервала времени, либо уменьшением удельной теплоемкости грунта, от которой не зависит установившееся распределение температуры. Второй способ более эффективен, так как требует меньших затрат машинного времени.

Результаты расчета представлены в табл. 4 ($R_0 = 0,4$ м, $j_0 = 8$ А/м², граница расчетной области на расстоянии $R = 15$ м).

Таблица 4. Температура (в °С) грунта в приэлектродной области сферического электрода

R , м	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6
$T(R)$, (8)	98,7	90,6	79,5	70,5	63,6	58,2	53,9
$T(R)$, (1)–(2)	98,8	90,1	79,1	70,5	63,5	58,7	54,6

Как видно из сравнения данных, если нет влагопереноса, то результаты расчетов по аналитической формуле и численным методом практически совпадают. Дополнительно были выполнены сравнительные расчеты для различных значений удельного электрического сопротивления грунта (табл. 5).

Таблица 5. Влияние удельного электрического сопротивления на температуру (в °С) сферического электрода

ρ , Ом·м	10	20	30	40
$T(R)$, (8)	59,4	98,7	138,1	177,5
$T(R)$, (1)–(2)	59,4	98,8	138,2	177,5

В табл.6 приведены результаты сравнения двух вариантов расчета температуры поверхности электрода (аналитического и численного с учетом влагопереноса).

Таблица 6. Изменение температуры (в °С) поверхности сферического электрода

$t, \text{ч}$	0	200	400	600	1000	2000	4000
$T(R_0)$, без влагопереноса	20	56,2	65,0	69,9	75,5	81,8	86,7
$T(R_0)$, с влагопереносом	20	94,0	108,6	116,4	125,4	136,4	145,9

Сравнение данных показывает, что неучет явления влагопереноса приводит к существенно заниженным значениям температуры поверхности электрода. Традиционно динамику изменения температуры электрода определяют по формуле [7]:

$$T(t) - T_0 = T_{\max} \left(1 - \exp\left(-k \frac{t}{\tau}\right) \right), \quad (10)$$

где k – корректирующий параметр, а величина τ определяется уравнением

$$\tau = \frac{c_0 T_{\max}}{\rho_0 j_0} = \frac{c_0}{2\lambda_0} \left(\frac{R_{el} S}{\rho_0} \right)^2, \quad (11)$$

где R_{el}, S – сопротивление растеканию тока и площадь электрода.

Численный анализ показал, что параметр k зависит от времени. В частности, для модельного грунта зависимость имеет вид

$$k = 0,37 \left(\frac{t}{\tau} \right)^{-0,6}. \quad (12)$$

Далее в табл. 7–9 иллюстрируется зависимость температуры поверхности сферического электрода от параметров k_1, k_2, k_{EO}, k_0 ($t = 1000$ часов). Расчеты проведены для диапазонов изменения параметров, типичных для грунтов.

Таблица 7. Влияние k_1, k_2 на температуру сферического электрода

k_1	0,2	0,3	0,4	0,2	0,3	0,4	0,2	0,3	0,4
k_2	2	2	2	3	3	3	4	4	4
$T, \text{°C}$	23,6	103,6	90,1	155,2	125,4	107,5	193,4	150,9	126,5

Заметим, что без учета влагопереноса $T = 75,5 \text{ °C}$ (табл. 6).

Таблица 8. Влияние коэффициента электроосмоса на температуру сферического электрода

$k_{EO} \cdot 10^9, \text{м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$	2	5	10	15	20
$T, \text{°C}$	106,7	125,4	139,6	147,8	153,7

Таблица 9. Влияние коэффициента фильтрации на температуру сферического электрода

$k_0 \cdot 10^8, \text{м/с}$	5000	500	50	5	0,5	0,05
$T, \text{°C}$	54,1	60,9	95,0	125,4	134,6	137,3
W	0,40	0,38	0,30	0,24	0,21	0,18

Коэффициент фильтрации существенно влияет на температуру электрода, если его значение находится в интервале $5 \cdot 10^{-6} - 5 \cdot 10^{-9}$ м/с. При меньших значениях зависимость слабая, так как влагоперенос определяется явлением электроосмоса. При больших значениях зависимость также слабая, потому что изменение влажности вблизи анода вследствие электроосмоса полностью

компенсируется процессом фильтрации. При высоких значениях коэффициента фильтрации температура электрода ниже, чем при расчете без учета влагопереноса. Это объясняется тем, что при постоянной влажности грунта увеличение температуры последнего приводит к увеличению его электрического сопротивления и, как следствие, – к уменьшению температуры.

Влияние на температуру остальных параметров грунта не иллюстрируется по следующим причинам:

- влияние коэффициента теплопроводности грунта λ достаточно хорошо описывается приближенной формулой (9);
- значение удельной теплоемкости грунта c практически определяется значением влажности W , зависимость такая же, как у W ;
- параметр α изменяется в узком интервале значений.

Влияние различных параметров на температурный режим работы цилиндрического заземлителя проиллюстрировано для того же самого грунта (табл. 3), радиус электрода $r_0 = 0,2$ м, плотность тока $j_0 = 2$ А/м².

Стационарные решения уравнений (1)–(2) для цилиндрического электрода имеют вид

$$\varphi(r) = -\rho_0 j_0 r_0 \ln \frac{r}{r_0} + \varphi(r_0), \quad T(r) = T(r_0) - \frac{j_0^2 \rho_0 r_0^2}{2\lambda_0} \ln^2 \frac{r}{r_0}, \quad (13)$$

где $\varphi(r_0), T(r_0)$ – потенциал и температура поверхности электрода.

Численное решение системы уравнений (1)–(4) производится для электрода бесконечной длины, но предварительно выполнено сравнение электрических полей электродов конечной и бесконечной длин. Потенциал электрода длиной l определяется формулой

$$\varphi = \frac{\rho_0}{4\pi} \int_0^l \frac{j(z) dz}{(r^2 + (l/2 - z)^2)^{1/2}}, \quad (14)$$

где $j(z)$ – линейная плотность тока.

Потенциал поверхности электрода определяется по формуле:

$$\varphi(r_0) = j_0 \rho_0 r_0 \left(\ln \frac{2l}{r_0} - 1 \right). \quad (15)$$

На рис. 1 представлено отношение радиальных компонент напряженности электрического поля электрода бесконечной длины и электрода длиной 30 м. При $r/l \leq 0,2$ значения очень близки. Расчеты произведены для различных длин, но результат не изменился. Модель электрода бесконечной длины может быть использована для ограниченного интервала времени. В табл. 10 представлены результаты расчетов температуры поверхности электрода длиной 40 м для различных значений времени и радиуса расчетной области r .

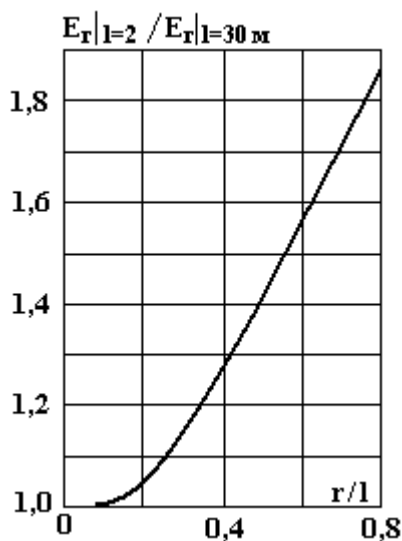


Рис. 1. Зависимость отношения радиальных компонент напряженности электрического поля E_r от отношения расстояния до оси цилиндра r к его длине l

Таблица 10. Температура (в °С) цилиндрического электрода

<i>t</i> , час	0	500	1000	2000	3000	5000
<i>T</i> , °С(<i>r</i> =1,5м)	20	29,6	31,4	32,0	32,0	32,0
<i>T</i> , °С(<i>r</i> =2,5м)	20	30,2	34,5	37,9	38,8	39,1
<i>T</i> , °С(<i>r</i> =5м)	20	30,6	35,2	41,1	44,9	47,7
<i>T</i> , °С(<i>r</i> =8м)	20	30,6	35,2	41,1	45,2	48,3
<i>T</i> , °С(<i>r</i> =15м)	20	30,6	35,2	41,1	45,2	48,3

Результаты не изменяются при измерении расчетного радиуса зоны от 8 до 15 м. Если длина электрода меньше, то расчетный интервал также меньше.

Учет влагопереноса для мелкозернистых грунтов дает существенно более высокие значения температуры (как и для сферического электрода, см. табл. 11).

Таблица 11. Влияние влагопереноса на температуру (в °С) цилиндрического электрода

<i>t</i> , час	0	200	400	600	1000	2000	4000
<i>T</i> , без влагопереноса	20	26,1	29,3	31,7	35,2	41,1	48,2
<i>T</i> , с влагопереносом	20	32,8	41,5	48,0	57,3	71,3	86,0

По формуле (14) для различных длин электрода были вычислены значения напряженности электрического поля и далее температура поверхности в середине электрода. Результаты (рис. 2) показывают, что модель электрода бесконечной длины дает верхнюю оценку температуры. При длине электрода более 20 м результаты близки по значению (даже при времени работы 1,5 года).

Численная модель (1)–(4) позволяет получить аппроксимирующие аналитические выражения. Для цилиндрического электрода хорошее совпадение результатов получается при использовании формулы

$$T(t) - T_0 = T_{\max} (1 - \exp(-0,2(t/\tau)^{0,5})), \quad (16)$$

где τ определяется формулой (11).

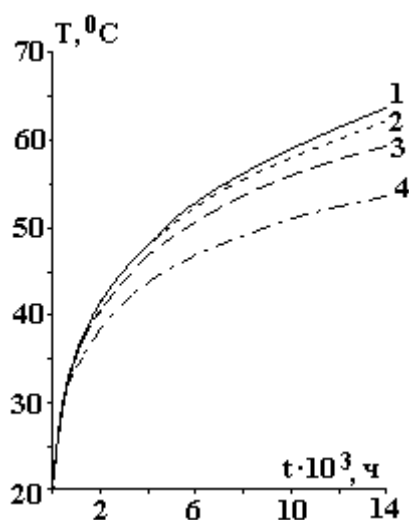


Рис. 2. Зависимость динамики температуры *T* поверхности цилиндрического электрода в центральной части от его длины *l*. *l*, м; 1 – ∞; 2 – 20; 3 – 10; 4 – 5

В табл. 12 представлены результаты оценки влияния коэффициентов на удельное электрическое сопротивление.

Таблица 12. Влияние коэффициентов k_1, k_2 на температуру цилиндрического электрода ($t = 2000$ ч)

k_1	0,2	0,3	0,4	0,2	0,3	0,4	0,2	0,3	0,4
k_2	2	2	2	3	3	3	4	4	4
$T, ^\circ\text{C}$	63,7	58,8	55,0	80,0	71,3	65,2	103,5	88,3	78,5

Заключение. На основе представленных результатов можно сделать следующие выводы:

- разработанную математическую модель совместного описания полей влажности температуры и постоянного тока можно использовать для расчета параметров процессов передачи постоянного тока в грунтах различных технических приложений;
- на основе модели можно получить простые аналитические зависимости для расчета различных параметров;
- из анализа расчетов температуры анодных электродов показана необходимость учета влияния влагопереноса в тонкодисперсных грунтах (неучет этого явления может привести к серьезным ошибкам в определении рабочих параметров электродов и преждевременному нарушению их работоспособности).

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихомолова К.П. Электроосмос. Л., 1989.
2. Ивлиев Е.А., Липатов В.В. Технология биоэлектрической очистки грунтов от нефтепродуктов // Электронная обработка материалов. 2003. № 6. С. 74–81.
3. Глобус А.М. Экспериментальная гидрофизика почв. Л., 1969.
4. Глобус А.М. Почвенно-гидрофизическое обеспечение агроэкологических математических моделей. Л., 1987.
5. Нертин С.В., Чудновский А.Ф. Физика почвы. М., 1967.
6. Rusk S. H.V.D.C. Power Transmission: Problem Relating To Earth Return // Direct Current. 1962. V. 7. № 11. P. 290–300.
7. Kimbark E.W. Direct Current Transmission. John Wiley & Sons. New York, 1971. V.1, Section 9–7. P. 359–380.

Поступила 31.10.05

Summary

The mathematical model for calculation of humidity, temperatures and DC in a soil is presented. The model can be used for calculation of the parameters of various direct current installations in which the current becomes through the ground. The model is consisting from the system nonlinear differential equations with variable coefficients. They are determining in the laboratory tests. Numerical results are given for earth electrodes of the transmission line. It is shown, that the neglect phenomena of transfer of humidity can be result the serious mistakes.