А.И. Григорьев, С.О. Ширяева, А.Н. Жаров, В.А. Коромыслов

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОСЦИЛЛЯЦИИ ЗАРЯЖЕННЫХ КАПЕЛЬ. Часть I. Аналитические и численные исследования общих закономерностей нелинейных осцилляций. Экспериментальные работы

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия

Исследование осцилляций заряженной капли в окрестности равновесной формы и их устойчивости представляет значительный интерес для различных разделов технической физики, научного приборостроения, геофизики и химической технологии (см., например, обзоры [1–16] и указанную литературу). В этой связи оно неоднократно проводилось как теоретически, так и экспериментально, в линейной и нелинейной постановках различной строгости. Большая часть исследований, проведенных к настоящему времени, выполнена в линейной постановке, а соответствующие работы достаточно подробно описаны в процитированных обзорах. Поэтому в изложении основное внимание будет уделено исследованиям осцилляций капель в нелинейных постановках.

1. Исследование нелинейных осесимметричных осцилляций капли и ее устойчивости по отношению к собственному заряду. Первое аналитическое исследование нелинейных осцилляций капель и пузырей в идеальной несжимаемой жидкости выполнено в 1983 г. Тсамопулосом и Брауном [17] асимптотическим методом Линдштедта–Пуанкаре с использованием пакета символьных компьютерных вычислений «MACSYMA 1977». Следует отметить, что успешно проведенные аналитические асимптотические анализы нелинейных осцилляций капель стали появляться только после широкого внедрения компьютерных пакетов аналитических символьных вычислений: ввиду большой громоздкости расчетов только проверка последних на компьютерах позволила приобрести уверенность в их справедливости.

Сами расчеты проводились по обычной схеме асимптотического анализа: исходная нелинейная задача после разложения по малому параметру сводилась к нескольким неоднородным линейным задачам различных порядков малости, а искомое решение представлялось в виде асимптотического разложения по малому параметру с коэффициентами, найденными при решении задач соответствующих порядков малости.

В [17] все расчеты проводились для одномодовой осесимметричной начальной деформации формы капли (пузыря), определяющейся вторым, третьим и четвертым полиномами Лежандра соответственно, начальное же распределение поля скоростей принималось нулевым. Центрально-симметричные осцилляции пузыря не рассматривались. Аналитические выражения для формы капли (пузыря), потенциала поля скоростей течения жидкости для трех указанных видов начальной деформации выписаны с учетом слагаемых второго порядка малости по малому параметру ε, в качестве которого принималось отношение амплитуды начальной деформации к радиусу капли. В работе приведены рассчитанные контуры образующих линейно и нелинейно осциллирующих капель для указанных трех видов начальной деформации формы.

Поправка к частоте осцилляций, квадратичная по амплитуде осцилляций (по параметру ε), определялась (в трех частных случаях, когда начальное возмущение поверхности содержит только одну моду: вторую, третью или четвертую) в расчетах третьего порядка малости и учитывалась лишь в основном ($\sim \varepsilon$) слагаемом асимптотического разложения. Речь идет о выражении вида $\sim\varepsilon\cdot\cos[(\omega-b\cdot\varepsilon^2)t]$. Несложно видеть, что, разложив такое выражение в ряд по ε, получим слагаемое ~bt, содержащее малый параметр ε в третьей степени. Такая не совсем корректная форма записи результатов нелинейных асимптотических анализов, когда деформация поверхности и потенциал поля скоростей выписываются лишь во втором порядке по малому параметру, а нелинейная поправка к частоте – в третьем, является традиционной и используется в задачах о нелинейных осцилляциях жидких струй [18] и нелинейных периодических капиллярно-гравитационных волнах (волнах Стокса) [19]. Кроме того, в расчетах [17] выяснилось, что поправка к частоте осцилляций капли ~ε^3 отсутствует.

Найденное в [17] снижение частоты осцилляций капли (пузыря) с увеличением их амплитуды хорошо согласовалось с ранее полученными результатами численного моделирования осцилляций капли вязкой жидкости [20], а также с результатами экспериментальных измерений [21]. Естественно, что сравнение теоретических результатов [17], полученных для идеальной жидкости, с результатами численных расчетов [20] проводилось в асимптотике малой вязкости, когда $\upsilon\sqrt{(\rho/\sigma R)} \ll 1$ (ρ – плотность жидкости; υ – коэффициент кинематической вязкости; σ – коэффициент поверхностного натяжения; R – радиус капли). В [17] также подтвержден отмеченный в [20, 21] факт временной асимметрии осцилляций: при начальном возбуждении основной моды, когда форма капли осциллирует между вытянутым и сплюснутым сфероидами, время нахождения капли (пузыря) в состоянии вытянутого сфероида превышает время ее нахождения в сплюснутом состоянии, и эта тенденция усиливается с увеличением амплитуды осцилляций.

Приведенные выражения для потенциальной и кинетической энергии осциллирующей капли во втором порядке малости в силу их квадратичности по амплитуде деформации равновесной формы и скорости течения жидкости соответственно целиком определились решениями линейного приближения, квадратичные поправки к величине деформации капли и полю скоростей течения жидкости в выписанные выражения не вошли, так как приводят к поправкам не ниже третьего порядка малости.

В [22] результаты, полученные в [17], обобщены на случай наличия на капле электрического заряда, жидкость же принималась электропроводной. Математическая формулировка задачи о нелинейных осцилляциях капли, использованная в [17], пополнена электростатической задачей расчета давления электрического поля собственного заряда нелинейно осциллирующей капли, связанной с чисто гидродинамической задачей [17] через динамическое граничное условие на свободной поверхности капли. Условие применимости электростатического приближения к расчету электрического поля у свободной поверхности, совершающей нелинейные осцилляции, выписано в виде требования малости характерного времени электропроводности в капле по сравнению с гидродинамическим временем (с характерным масштабом обезразмеривания времени): $\sqrt{(\rho\cdot R^3/\sigma)} \gg (\chi/4\pi\varepsilon_*\cdot R^2)$, здесь χ – удельное сопротивление жидкости, ε_* – диэлектрическая проницаемость воздуха (размерная). При расчетах использовался асимптотический метод многих временных масштабов [23], что позволило по сравнению с [17] найти положения внутренних нелинейных гармонических резонансов для взаимодействия мод осцилляций, возбуждающихся в заряженной капле во втором и третьем порядках малости, и построить решения, пригодные в окрестности резонанса четвертой и шестой мод. Сами расчеты проводились с использованием пакета символьных компьютерных вычислений «MACSYMA».

Найденные в [22] в расчетах второго порядка малости квадратичные по малому параметру компоненты решений (деформации формы капли, потенциала поля скоростей течения жидкости и электростатического потенциала в окрестности капли), а также поправки к частотам осцилляций, определяемые в расчетах третьего порядка малости, содержали в знаменателях множители вида $(\omega_m^2 - j^2\cdot\omega_n^2)$, где ω_m и ω_n – частоты различных мод осцилляций капли; j – целое число. В некоторых ситуациях (при некоторых значениях собственного заряда капли Q, ее радиуса и величины коэффициента поверхностно натяжения) может выполняться соотношение $(\omega_m^2 - j^2\cdot\omega_n^2)=0$. Такие ситуации по аналогии с вынужденными гармоническими осцилляциями принято называть резонансными, поскольку в точках резонансов решения расходятся. В теории возмущений отработаны процедуры отыскания решений, как в окрестности, так и в самой точке резонанса [23] путем введения параметра расстройки, величина которого может непрерывно изменяться. В физических задачах параметры расстройки вводятся на основе изменения неких физических характеристик, которые ранее принимались фиксированными. В итоге резонансные компоненты решения сводятся к секулярным слагаемым, обрабатываемых в свою очередь в стандартных математических процедурах.

В [22] в расчетах второго порядка малости обнаружен резонанс между четвертой (n=4) и шестой (n=6) модами при некотором заряде капли Q_r, докритическом в смысле линейной устойчивости заряженной капли по отношению к собственному заряду (в смысле анализа устойчивости, проведенного Рэлеем [24]), $Q_r < Q_*$, здесь Q_* – критический заряд, при котором теряет устойчивость основная мода (n=2). Тсамопулос и Браун [22] ввели параметр расстройки на основе варьирования заряда капли Q в малой окрестности Q_r и построили решение, справедливое в самой точке резонанса и его окрестности. Показано, что в точке резонанса энергия полностью перекачивается из изначально возбужденной четвертой моды в шестую меньше чем за три периода осцилляций четвертой моды. Отмечено, что максимальная амплитуда шестой моды достигается в положении точного резонанса (при величине параметра расстройки, равной нулю) и что амплитуда шестой моды убывает по гиперболическому закону при увеличении абсолютной величины параметра расстройки.

В [22] показано, что резонансные ситуации между модами осцилляций реализуются и для незаряженной капли. В частности, такое взаимодействие для основной (n=2) и четвертой (n=4) мод обнаруживается в расчетах третьего порядка малости. Указанная степень малости приводит к существенному увеличению (на порядок) характерного времени обмена энергией между резонансно-взаимодействующими модами.

В заключение Тсамопулос и Браун [22] качественно оценивают возможное влияние малой вязкости на характерные черты нелинейных осцилляций. Так, они полагают, что результаты расчетов можно сравнивать с данными экспериментов с маловязкими каплями, когда характерное время затухания осцилляций, обусловленное вязкостью, много больше характерного временного масштаба осцилляций капли идеальной жидкости. Говоря о влиянии вязкости на резонансное взаимодействие, ученые полагают, что для резонансов второго порядка малости малая вязкость должна влиять на обе взаимодействующие моды одинаковым образом независимо от факта их взаимодействия. Это представляется неверным, ибо хорошо известно [25], что декременты вязкого затухания осцилляций капель существенно зависят от номеров мод и не могут быть одинаковы для разных мод. Для резонансов, обнаруживаемых в расчетах третьего порядка малости, влияние даже малой вязкости весьма существенно ввиду большой длительности характерного времени обмена энергией между резонансно-взаимодействующими модами.

Для сравнения результатов проведенного анализа с экспериментальными данными Тсамопулос и Браун [22] предлагают воспользоваться результатами экспериментов с электростатическим подвесом заряженных капель в поле сил тяжести, ссылаясь при этом на результаты расчета равновесной формы заряженной капли [26]. В [26] получено, что отклонение равновесной формы заряженной капли от сферической во внешнем электростатическом поле невелико. Такое предложение представляется излишне поспешным, ибо согласно результатам работ [27–29] поправки к частотам осцилляций капель во внешних электрических полях, связанные с отклонением формы капли от сферической (со сфероидальной деформацией), достаточно велики и имеют тот же порядок величины, что и поправки, связанные с нелинейностью осцилляций. Вопрос о нелинейных осцилляциях заряженной капли во внешнем электростатическом поле нуждается в отдельном исследовании, которое представляется весьма сложным даже по прошествии двух десятков лет со времени появления цитируемых работ Тсамопулоса и Брауна.

Следующей в порядке появления в свет и накопления информации о нелинейных осцилляциях капель и методах анализа подобных задач стала работа Тсамопулоса, Акиласа, Брауна [30], в которой проанализированы особенности нелинейных движений заряженной капли идеальной несжимаемой электропроводной жидкости, несущей заряд, весьма близкий к критическому в смысле устойчивости капли по отношению к собственному заряду. В отличие от цитированных работ Тсамопулоса и Брауна в [30] использовались условия двух типов: 1) начальное распределение поля скоростей принималось нулевым, а исходная деформация задавалась виртуальным возмущением основной (n=2) моды; 2) в начальный момент времени величины поля скоростей и деформаций поверхности принимались отличными от нуля. Показано, что переход от устойчивых осцилляций в окрестности равновесной сферической формы при заряде, близком к критическому в смысле линейной устойчивости к неустойчивым движениям, связанным с нарастанием амплитуды основной моды (с деформацией к семейству сплюснутых и вытянутых сфероидов), является транскритической бифуркацией.

Следует отметить, что некоторые компоненты решений, полученных в [22], содержат квадрат частоты ω^2_2 осцилляций основной моды (n=2) в знаменателях в качестве сомножителя, а так как при приближении заряда капли Q к критическому значению Q_* частота $\omega_2 \to 0$, то соответствующие решения расходятся и становятся непригодными. В этой связи построение решений, пригодных в пределе $Q \to Q_*$, требует устранения возникающих расходимостей. В [30] эта цель достигается путем введения зависимости Q_* от малого параметра ε, характеризующего начальную сфероидальную деформацию, по аналогии с тем, как в [18] исследовалась нелинейная устойчивость жидкой струи в окрестности критического волнового числа. Сама идея зависимости величины собственного заряда, критической для начала распада заряженной капли, от степени сфероидальной деформации высказана еще Бором и Вилером [31] в связи с разработкой капельной модели ядра атома (одновременно с работой [30] идея положена в основу анализа физического механизма реализации неустойчивости капли по отношению к собственному заряду в [28] и неустойчивости незаряженной капли в однородном внешнем электростатическом поле [29]).

В [30] весь анализ проводился как асимптотическими, так и численными методами (методом конечных элементов). Результаты асимптотического и численного анализа в [30] хорошо согласуются между собой. Устойчивость нелинейных осцилляций капли, имеющей заряд, близкий к критическому (отличающийся от критического на величину первого порядка малости), исследуется в терминах теории бифуркаций. При отыскании решения второго порядка малости, когда начальная деформация определяется основной модой, в получающихся функциях неоднородностей нулю приравниваются слагаемые, приводящие к появлению секулярных членов. Суперпозиция таких слагаемых дает так называемое «условие разрешимости»: обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее временную эволюцию амплитуды основной моды осцилляций. Бифуркационный анализ такого уравнения показал, что при докритических в смысле линейной устойчивости величинах собственного заряда нелинейные осцилляции основной моды капли остаются устойчивыми, если их амплитуда не превышает определенного значения, зависящего от отклонения величины заряда капли от критической. В противном случае капля претерпевает неустойчивость. Точка бифуркации при выполнении условия $Q < Q_*$ является устойчивой (центром), при $Q > Q_*$ – неустойчивой (седлом).

В [30] показано, что начальная деформация заряженной сферической капли к вытянутому сфероиду снижает величину критического заряда для распада капли. Деформация капли к сплюснутому сфероиду увеличивает ее устойчивость по отношению к собственному заряду, если ограничивать рассмотрение осесимметричными виртуальными осцилляциями (этот результат впоследствии будет подтвержден в численных анализах Басарана и Скривена [32–33]). Дальнейшая судьба неустойчивой по отношению к собственному заряду вытянутой сфероидальной капли в [30] трактуется в рамках представлений о ее делении на части сравнимых размеров, и численно рассчитываются формы делящейся капли в различные моменты времени. Однако построенная в [30] картина распада не согласуется с многочисленными экспериментами по проверке справедливости критерия Рэлея (см., например, обзоры [11, 12, 15]), в которых утверждается, что неустойчивая капля, сбросив заметную часть своего заряда, сохраняет практически неизменной свою массу (точнее говоря, изменение массы капли находится в пределах погрешности измерений [34]). В этой связи предлагаемый в [35] распад неустойчивой капли путем сброса с ее вершин серии высокодисперсных сильно заряженных капелек представляется более адекватным экспериментальным данным. Вопрос об устойчивости сплюснутой сфероидальной капли по отношению к неосесимметричным деформациям в [30] изучается, но ответа на него нет ввиду сложности предполагаемого анализа.

2. Исследование устойчивости заряженной капли по отношению к неосесимметричным осцилляциям. Устойчивость заряженной капли, имеющей форму сплюснутого сфероида, по отношению к неосесимметричным деформациям исследована позднее [36–38]. В [36–37] в рамках линейного анализа показано, что по достижении зарядом сплюснутой капли рэлеевского предела она становится неустойчивой по отношению к неосесимметричным деформациям $\sim P_2^2(\cos\theta)$. В [38] выписано выражение для потенциальной энергии заряженной капли, имеющей форму трехосного эллипсоида, и показано, что потенциальная энергия сплюснутой сфероидальной капли больше энергии трехосной эллипсоидальной, которая в свою очередь больше энергии вытянутой сфероидальной капли. Таким образом, заряженной до рэлеевского предела сплюснутой сфероидальной капле энергетически выгодно деформироваться к форме трехосного эллипсоида, которому в свою очередь энергетически выгодно деформироваться к неустойчивой вытянутой сфероидальной форме.

Нелинейное резонансное взаимодействие пятой (n=5) и восьмой (n=8), а также десятой (n=10) и шестнадцатой (n=16) мод в незаряженной капле идеальной несжимаемой жидкости рассмотрено Натараньяном и Брауном в [39]. Само исследование проведено в рамках Лагранжева метода, ранее использованного при изучении капиллярно гравитационных волн на поверхности воды. В выписываемый лагранжиан вводятся в соответствии с идеей метода разных временных масштабов быстрое (характеризующее решения первого порядка малости) и медленное (характеризующее решения второго порядка малости и в том числе нелинейное взаимодействие мод) времена. Начальная деформация указывается суперпозицией пары взаимодействующих мод: 5 и 8 или 10 и 16. Затем лагранжиан усредняется по быстрому времени. Уравнения Эйлера–Лагранжа, соответствующие оставшейся после усреднения части Пагранжиана, содержат медленное время и описывают квадратичное по малому параметру взаимодействие мод, определяющих начальную деформацию. Результаты расчетов резонансного обмена энергией между взаимодействующими модами в случае осесимметричных осцилляций зависят от парциального вклада взаимодействующих мод в начальную деформацию.

В [39] показано, что если не ограничивать рассмотрение осесимметричными модами осцилляций, то следует учесть, что с m-ой осесимметричной модой связаны $(2m+1)$ неосесимметричных мод с одинаковыми частотами и близкими величинами энергии их возбуждения и осесимметричные моды неустойчивы в смысле передачи своей энергии в связанные с ними неосесимметричные моды. В итоге энергия, изначально заключенная в виртуально возбужденной в начальный момент времени осесимметричной m-ой моде, «размазывается» по $(2m+1)$ неосесимметричным модам. При возбуждении в начальный момент двух резонансно-взаимодействующих мод с высокими номерами количество связанных с ними неосесимметричных мод оказывается весьма большим и обмен энергией между взаимодействующими неосесимметричными модами носит стохастический характер.

Внутреннее резонансное взаимодействие мод, реализующееся в третьем порядке малости, выполненное с использованием Лагранжева формализма, исследовано Натараньяном и Брауном в [40]. В экспериментах Тринча и Ванга [41], которые исследовали возбуждаемые акустическим полем осцилляции большой амплитуды капель в акустическом подвесе, оказалось, что осцилляции большой амплитуды весьма трудно возбудить вследствие появления на поверхности капли неосесимметричной бегущей волны, которая в конце концов приводила к вращению капли как целого. Такой же эффект проявлялся и в экспериментах Якоби и др. [42] со свободно висящими в условиях невесомости каплями, осцилляции которых генерировались акустическим полем. Натараньян и Браун предположили, что такое поведение акустически возбуждаемых левитирующих капель связано с реализацией в каплях резонанса третьего порядка с участием неосесимметричных мод. Отмечено, что кроме резонанса третьего порядка между второй ($n=2$) и четвертой ($n=4$) модами, для которых выполняется условие $\omega_4 \pm 3\cdot\omega_2 = 0$ [22], существуют резонансы третьего порядка между $(2m+1)$ неосесимметричными модами, связанными с m осесимметричной модой. Возбуждение таких резонансов и может привести к вращению капли как целого. В [40] исследованы в рамках Лагранжева метода резонансное взаимодействие между неосесимметричными модами, связанными с третьей модой ($m=3$), и между второй ($n=2$) и четвертой ($n=4$) модами с учетом влияния связанных с ними неосесимметричных мод. Показано, что при начальном возбуждении третьей осесимметричной моды ($n=3$, $m=0$) неосесимметричная тессеральная мода ~ $P_3^2(\theta,\varphi)$ (то есть $n=3$, $m=2$) претерпевает неустойчивость, что в итоге может привести к вращению капли как целого. Для ситуации начального возбуждения второй ($n=2$) и четвертой ($n=4$) мод, резонансно между собой взаимодействующих, претерпевает неустойчивость неосесимметричная тессеральная мода ~ $P_4^2(\theta,\varphi)$ (то есть $n=4$, $m=2$), что также может привести к вращению капли как целого. Тем не менее результаты [40] вызывают сомнение, поскольку нелинейная поправка к частоте третьей моды, полученная в [40], отличается от найденной ранее в строгом гидродинамическом анализе [22], и авторы [40] утверждают, что результаты их последнего расчета нуждаются в независимой проверке на предмет наличия ошибок. Сама идея возможности перекачки без постороннего силового воздействия энергии из осесимметричных мод капли в неосесимметричные, сопровождающейся понижением порядка симметрии реализующихся осцилляций, представляется сомнительной, хотя для системы взаимодействующих точечных осцилляторов перекачка энергии из высоких мод в низкие отмечена и даже получила специальное название − «распадная неустойчивость» [43]. В экспериментах [41, 42] направленное силовое воздействие на каплю со стороны акустического поля есть, и возникновение в итоге вращения капли как целого не представляется необычным, чего нельзя сказать о проводимом в [40] анализе.

Следует отметить, что сама идея возможности внутреннего резонансного взаимодействия мод осцилляций с различной симметрией не вызывает никаких возражений. Тщательного рассмотрения требует вопрос о направлении перекачки энергии при реализации внутреннего резонансного взаимодействия. Во всех цитированных работах при упоминании о нелинейном внутреннем резонансном взаимодействии мод речь шла о так называемом вырожденном трехмодовом резонансе, когда одна мода дважды взаимодействует с другой. В реальности вырожденное внутреннее нелинейное резонансное взаимодействие мод обладает асимметрией [44–46] и энергия, запасенная в модах, определяющих начальную деформацию капли, перекачивается только из мод с малыми номерами в моды с большими номерами. Обратная перекачка энергии из высоких мод в низкие идет лишь в рамках той доли энергии, которая поступила из низких мод в высокие. Если же в реальности взаимодействуют три моды с различными номерами, то говорят о вторичном комбинационном резонансе, при котором возможна перекачка энергии из определяющих начальную деформацию капли мод с высокими номерами в моду с низким номером, отсутствующую в спектре мод, определяющих начальную деформацию [45].

Вопрос о направлении перекачки энергии между резонансно-взаимодействующими модами осцилляций капли с различной симметрией до сих пор не исследовался, но такое исследование выполнено для волн на поверхности заряженной струи идеальной несжимаемой жидкости [46]. Выяснилось, что перекачка энергии из неосесимметричной моды в осесимметричную может произойти, но обратный перенос не реализуется.

В заключение в [40] кратко на качественном уровне обсуждается возможная роль вязкости в реализации нелинейных осцилляций капли.

Влияние возбуждения неосесимметричных мод на распад заряженной капли идеальной электропроводной несжимаемой жидкости исследовано Натараньяном и Брауном в [47] в рамках классического гидродинамического анализа. В работе доведено до конца исследование, начатое в [30]. Точнее говоря, распространено на случай неосесимметричных мод осцилляций, что позволило правильно истолковать закономерности реализации неустойчивости капли, заряженной до рэлеевского предела, претерпевшей виртуальную деформацию к сплюснутому сфероиду. Показано, что сплюснутая, заряженная выше рэлеевского предела капля неустойчива по отношению к неосесимметричным осцилляциям, что независимо подтверждено в [36–38]. Причина такого обстоятельства в том, что согласно [38] потенциальная энергия трехосного сильно заряженного сфероида меньше потенциальной энергии сплюснутой сфероидальной капли и переход от осесимметричной формы капли к неосесимметричной выгоден энергетически. Показано, что при докритическом в смысле линейной устойчивости заряде устойчивых неосесимметричных форм капли не существует.

В [47] рассмотрение проводится в рамках асимптотического метода многих масштабов в предположении, что параметр Рэлея W капли отличается критического на величину порядка малого параметра ε, в качестве которого берется отношение амплитуды начальной деформации капли к радиусу. Разложения уравнения формы поверхности капли, потенциала поля скоростей течения жидкости и электростатического потенциала проводятся по корню квадратному из малого параметра: $\sqrt{\varepsilon}$. Основанием для такого выбора параметра разложения является следующее обстоятельство. Пусть параметр Рэлея W, характеризующий устойчивость капли по отношению к собственному заряду ($W \equiv \left(Q^2 / 4\pi R^3 \sigma\right)$) и входящий в определение частоты линейных осцилляций заряженной капли:

$$\omega_n^2 \equiv n(n-1)[(n+2)-W],$$

отличается от критического $W_* = W_2$, равного 4 ($W_* = 4$), на величину порядка малого параметра ε: $W \approx W_* + b \cdot \varepsilon$, то частота осцилляций основной моды (развитие которой собственно и определяет механизм реализации неустойчивости [28–29]) будет пропорциональна корню квадратному из малого параметра $\omega_2 \approx \sqrt{b \cdot \varepsilon}$.

Кроме анализа устойчивости заряженной капли по отношению к неосесимметричным модам осцилляций в [47] проведено исследование влияния на устойчивость заряженной сферической капли таких нарушающих ее центральную симметрию факторов, как наличие однородного внешнего электростатического поля, приводящего к деформации капли по полю к фигуре, близкой к вытянутому сфероиду, и вращения капли как целого, приводящего к деформации капли к фигуре, близкой к сплюснутому сфероиду. Оба случая ранее проанализированы численно методом конечных элементов в [26, 48]. Результаты, полученные в [47], в общих чертах хорошо согласуются с данными численных расчетов [26, 48], но содержат существенно более подробную информацию о закономерностях эволюции капель при разных способах нарушения их центральной симметрии. В частности, в [47] показано, что наличие однородного внешнего электростатического поля любой величины снижает устойчивость заряженной капли в смысле снижения величины собственного заряда, при котором реализуется неустойчивость. В [47] продолжен бифуркационный анализ устойчивости капли, начатый в [30]. Выяснилось, что в присутствии однородного внешнего электростатического поля переход от устойчивых состояний капли к неустойчивым соответствует суперкритической бифуркации. Влияние вращения на форму и устойчивость заряженной капли более сложно: в зависимости от соотношения величины заряда капли и величины момента ее количества движения, связанного с вращением, она может принимать устойчивые формы сплюснутых сфероидов, устойчивые сплюснутые неосесимметричные формы (определяющиеся различными сферическими функциями) и претерпевать неустойчивость в соответствии с субкритической бифуркацией.

В работе [49] развивается численное исследование равновесных форм и устойчивости заряженной капли электропроводной жидкости, начатое в [30]. По сравнению с [30], где для численного анализа использовался метод конечных элементов, пригодный лишь для малых отклонений формы капли от сферической, в [49] применялась комбинация метода граничных элементов и метода конечных элементов, позволяющая анализировать произвольные деформации заряженных капель. Кроме того, в [49] учитывались не только осесимметричные, но и неосесимметричные моды осцилляций, что существенно расширило круг вопросов, на которые удалось ответить. В ходе проведенных расчетов подтверждены результаты работы [30], в частности показано, что на рэлеевском пределе заряда четные моды осцилляций претерпевают транскритическую бифуркацию. Кроме того, на рэлеевском пределе заряда нечетные моды в зависимости от начальных условий способны претерпевать либо субкритическую, либо суперкритическую бифуркации. Выяснилось, что развитие неустойчивости четных мод, связанных с удлинением капли вдоль оси симметрии, заканчивается образованием на вершинах капли конических выступов (конусов Тейлора) с углами, близкими к ранее полученным в экспериментах Тейлора [50]. Развитие неустойчивости нечетных мод, асимметричных относительно экваториальной плоскости, также заканчивается образованием на осесимметричной вершине капли конического выступа. Проанализирована возможность деления неустойчивых капель на две части сравнимых размеров, а также на множество более мелких (когда неустойчивость капли реализуется с образованием на вершинах капли конических выступов).

На этом заканчивается цикл теоретических работ [17, 22, 30, 39–40, 47, 49], посвященных асимптотическому исследованию аналитическими и численными методами нелинейных осцилляций капли, выполненных коллективом авторов, принадлежащих к одной группе: Р.А. Брауном, Дж.А. Тсамопулосом, Р. Натараньяном, П.М. Адорнато, Н.А. Пелеказисом. Т.Р. Акиласом. Указанные работы отличаются высоким уровнем использованного математического аппарата и скупостью описания процедуры расчета. Как правило, всякая последующая публикация этих авторов в полной мере использует результаты ранее опубликованных работ, отсылая читателя за деталями расчетов к ранее опубликованным статьям, так что пользоваться ими можно, когда они имеются в наличии одновременно. Но даже и при этом условии работы трудночитаемы, так как все промежуточные расчеты, как правило, опускаются и приводятся лишь окончательные результаты. Плохо то, что некоторые работы содержат и описки, и ошибки, исправить которые можно, только повторив все расчеты заново. Форма, в которой приводятся результаты, не всегда удобна для восприятия, и часто приходится просто верить авторам «на слово». Сказанное касается, например, внутренних резонансов незаряженной капли. В [17], где, собственно, должна идти речь об открытии резонансов и их положении, нет об этом ни слова, а из приведенных итоговых формул их не видно. В [22], посвященной заряженной капле, содержится лишь словесное указание на существование в третьем порядке малости резонансного взаимодействия второй и четвертой мод, формул же, подтверждающих сказанное, не приводится. В [39] без приведения аналитических выражений и без ссылок на расчеты говорится о двух резонансах, реализующихся во втором порядке малости между пятой и восьмой, десятой и шестнадцатой модами незаряженной капли. В [40] опять-таки без приведения аналитических выражений исследуются резонансы, реализующиеся в третьем порядке малости: упомянутый в [22] резонанс между второй и четвертой модами и, безусловно, совсем экзотический резонанс между неосесимметричными осцилляциями одной моды. Тем не менее аналитические работы указанной группы авторов явились пионерскими в аналитическом исследовании нелинейных осцилляций капель.

3. Численные расчеты нелинейных осцилляций и устойчивости заряженных капель. Учет влияния вязкости. С численными расчетами нелинейных осцилляций капель, кроме авторов группы Р.А. Брауна, связаны имена О.А. Басарана и Л.Е. Скривена [32–33, 48, 51–52]. Их работы отличаются изощренной техникой численных расчетов, включающей комбинации многих известных и вновь разработанных методов (напомним, что в группе Р.А. Брауна при численных расчетах использовался в основном метод конечных элементов и лишь в одной работе – его комбинация с методом граничных элементов). Если говорить о недостатках работ, то они характерны для большинства численных исследований: результаты расчетов не выходят за рамки использованных при расчете математических моделей, их прогностические возможности весьма малы и подвергаются избыточной математической формализации.

Заметная часть численных анализов нелинейных осцилляций капель посвящена учету влияния вязкости жидкости на нелинейные осцилляции капель [52–54]. Сама по себе постановка проблемы, безусловно, полезна и своевременна, но результаты вызывают сомнение. В работе [53] для учета влияния вязкости модифицируется метод поверхностных потенциалов [55], строго обоснованный только для описания безвихревых движений идеальной жидкости. Модификация к описанию течения вязкой жидкости происходит с помощью некорректного использования идей метода пограничного слоя. Некорректность проявляется в том, что граничное условие на касательные натяжения, существенное для корректной формулировки задачи в процедуре решения, предложенной в [53], оказывается неиспользованным. В [54] численные расчеты проводятся на основе расширения вариационного принципа Гаусса на случай вязкой жидкости, что заведомо некорректно, поскольку еще в [56, 57] показано, что использовать вариационные принципы для описания движения вязкой жидкости нельзя.

Следует отметить, что строгий учет влияния вязкости в задачах о нелинейных осцилляциях и периодических волнах на свободной поверхности жидкости (на границе раздела несмешивающихся жидкостей) до сих пор представляет проблему как для обсуждаемой сферической, так и цилиндрической, и плоской свободной поверхности жидкости. Только в последнее время появились положительные сдвиги в описании нелинейных капиллярно-гравитационных волн типа Стокса на плоской поверхности жидкости [58–60]. Попытка строго описать нелинейные осцилляции капли вязкой жидкости, предпринятая в [61], окончилась неудачно ввиду крайней громоздкости выражений, получающихся уже во втором порядке малости.

Следует отметить, что в [54], так же как и в более ранней работе тех же авторов [62], выполненной для приближения идеальной жидкости, содержится существенная ошибка в постановке задачи, дающая неверные результаты расчетов второго порядка малости. Авторы [54, 62] ошибочно полагают, что центр масс нелинейно осциллирующей капли также совершает осцилляции, и, считая систему отсчета, связанную с центром масс капли, неинерциальной, вводят в уравнение движения жидкости дополнительное слагаемое, пропорциональное ускорению центра масс капли. Забывается известная теорема механики, согласно которой никакими движениями внутри замкнутой системы нельзя добиться движения центра масс. Как показано в [63], в ситуации, когда в спектре мод, определяющих начальную деформацию нелинейно осциллирующей капли, содержится несколько мод с последовательно возрастающими номерами, происходит возбуждение во втором порядке малости трансляционной моды ($n=1$), центр же масс капли остается неподвижным.

4. Экспериментальные наблюдения нелинейных деформаций и осцилляций капель. Работа [62] кроме ошибочных теоретических расчетов содержит описание весьма интересных экспериментальных измерений временной зависимости амплитуды нелинейно осциллирующих капель. Капли получались при дроблении струй (диаметром 100–300 мкм), и, следовательно, осцилляции совершались при наличии начальной деформации, которая визуально фиксировалась, и отличном от нулевого начальном распределении поля скоростей течения жидкости в капле, которое не контролировалось. Оторвавшиеся капли пролетали в поле зрения следящей оптической системы, позволявшей проводить измерения амплитуд осцилляций как функций времени с высокой точностью. Результаты измерений представлены в виде зависимости амплитуды осцилляций от времени, на которых хорошо прослеживается затухание, связанное с вязкостью. Эксперименты проводились с 95% раствором этанола при атмосферном давлении воздуха и комнатной температуре. Физико-химические характеристики (вязкость, коэффициент поверхностного натяжения и плотность) контролировались стандартными методами с приемлемой точностью.

Уместно отметить, что экспериментальное наблюдение осцилляций капель большой амплитуды проводилось различными средствами [21, 41–42, 64–66]. Так, в [21] капля подвешивалась в не смешивающейся с жидкостью среде такой же плотности, и в капле возбуждались осцилляции большой амплитуды. Трудность в интерпретации количественных результатов экспериментов связана с возможными вариациями величины коэффициента межфазного натяжения; в совместном влиянии на затухание осцилляций вязкости и жидкости и среды. В [41] капля подвешивалась в поле сил тяжести в акустическом подвесе. В этом случае давление акустического поля существенно деформировало каплю. Наблюдение за нелинейными осцилляциями капли в условиях невесомости (на «Шаттле»), предпринятое в [42, 64], по всей видимости, является оптимальным для количественных измерений характеристик нелинейных осцилляций капель. Интересная методика экспериментов нелинейных трехмерных осцилляций капли ртути массой 13,6 г использована в [65]. Капля ртути помещалась на дно закрытого сосуда с раствором электролита. При пропускании через электролит переменного тока регулируемой частоты в капле возбуждались нелинейные осцилляции, которые фиксировались на видеокамеру. Чтобы капля приняла сферическую форму, сосуд, в котором она находилась, сбрасывался с десятиметровой вышки, так что капля во время падения находилась в состоянии, близком к невесомости. Результаты экспериментов представлены в виде кинограмм. Приведена математическая модель параметрических трехмерных нелинейных осцилляций вязкой капли под действием периодически изменяющегося внешнего давления, получаемая из принципа Лагранжа по аналогии с тем, как это делалось в [30, 40], в виде нелинейных уравнений Матье. Результаты проведенного теоретического анализа удовлетворительно согласуются с данными собственных экспериментов. Тем не менее полученные результаты теоретического анализа сомнительны согласно [55–56] ввиду применения вариационных принципов к описанию движения капли вязкой жидкости.

В [66–68] приведены результаты экспериментального исследования нелинейных стадий реализации неустойчивости незаряженных капель в однородных внешних электростатических полях. В [66, 68] эксперименты проводились с каплями, взвешенными в жидких внешних средах равной плотности, в [67] – с каплями в условиях невесомости (на борту самолета, летящего по параболической траектории). В работах прослежена динамика деформации капель в однородном внешнем электростатическом поле вплоть до реализации неустойчивости.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 03–01–00760 и гранта Президента РФ № МК 2946.2004.01.

ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Baily A.G.* Electrostatic atomization of liquids (revue) // Sci. Prog., Oxf. 1974. V.61. P. 555–581.
2. *Коженков В.И., Фукс Н.А.* Электрогидродинамическое распыление жидкости (обзор) // Успехи химии. 1976. Т.45. № 12. С. 2274–2284.
3. *Bogy D.B.* Drop formation in a circular liquid jet//Ann. Rev. Fluid Mech. 1979. V.11. P. 207–228.
4. *Гонор А.Л., Ривкинд В.Я.* Динамика капли // Сб. Итоги науки и техники. Серия: Механика жидкости и газа. Т.17. М., 1982. С. 98–159.
5. *Габович М. Д.* Жидкометаллические источники ионов (обзор) // УФН. 1983. Т.140. №.1. С.137–151.
6. *Блаженков В.В., Дмитриев А.С., Шишов В.В.* Монодиспергирование вещества (от опытов Савара до современных технологий: ретроспектива и перспективы) // Тр. Моск. энерг. ин-та. 1983. Вып. 615. С. 3–14.
7. *Bailey A.G.* The Theory and practice of electrostatic spraying (revue)//Atomization and Spray Technology. 1986. V. 2. P. 95–134.
8. *Дудников В.Г., Шабалин А.Л.* Электрогидродинамические источники ионных пучков (обзор) // Препринт 87-63 ИЯФ СО АН СССР. Новосибирск, 1987.
9. *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Сыщиков Ю.В.* Электростатическое монодиспергирование жидкостей как метод получения двухфазных систем (обзор) // ЖПХ. 1989. Т. 62. № 9. С. 2020–2026.
10. *Fenn J.B., Mann M., Meng C.K. et al.* Electrospray ionization for mass spectrometry of large biomolecules (revue) // Science. 1989. V.246. № 4926. P. 64–71.
11. *Григорьев А.И.* Неустойчивости заряженных капель в электрических полях (обзор) // ЭОМ. 1990. № 6. С. 23–32.
12. *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Шевченко С.И.* ЭГД неустойчивости в дисперсных системах (обзор) // Научное приборостроение. 1991. Т.1. № 3. С. 25–43.
13. *Шевченко С.И., Григорьев А.И., Ширяева С.О.* ЭГД распыление жидкости (обзор) // Научное приборостроение. 1991. Т. 1. № 4. С. 3–21.
14. *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Святченко А.А.* Классификация режимов работы электрогидродинамических источников жидкокапельных пучков (обзор) // Препринт ИМ РАН № 25. Ярославль, 1993.
15. *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* Капиллярные неустойчивости заряженной поверхности капель и электродиспергирование жидкостей (обзор) // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
16. *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* Деление заряженных капель во внешнем электрическом поле на части сравнимых размеров (обзор) // Электронная обработка материалов. 2000. № 4. С. 17–27.
17. *Tsamopolous J.A., Brown R.A.* Nonlinear oscillations of inviscid drops and bubbles // J. Fluid Mech. 1983. V.127. P. 519–537.
18. *Nayfeh F.H.* Nonlinear stability of a liquid jet // Phys. Fluids. 1970. V.13. № 4. P.841–847.
19. *Nayfeh A.H.* // Phys. Fluids. 1970. V.13. № 3. P. 545–550.
20. *Foote G.B.* A numerical method for studying simple drop behavior: simple oscillation // J. Comp. Phys. 1973. V.11. P. 507–530.

21. *Trinch E., Wang T.G.* Large amplitude drop oscillations // Proc. 2-nd Int. Colloq. on Drop and Bubbles. Pasadena: 1982. JPL Publication 82–87.
22. *Tsamopolous J.A., Brown R.A.* Resonant oscillations of inviscid charged drops // J. Fluid Mech. 1984. V.147. P. 373–395.
23. *Найфе А.Х.* Методы возмущений. М., 1976.
24. *Rayleigh, Lord.* On equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity // Phil. Mag. 1882. V.14. P.184–186.
25. *Ламб Г.* Гидродинамика. Л., 1947.
26. *Adornato P.M., Brown R.A.* Shape and stability of electrostatically levitated drops // Proc. R. Soc., London. 1983. V. A389. P. 101–117.
27. *Cheng K.J.* Capillary oscillations of a drop in an electric field // Phys. Lett. 1985. V.A112. №11. P.392–396.
28. *Григорьев А.И.* О механизме неустойчивости заряженной проводящей капли // ЖТФ. 1985. Вып.7. С. 1272–1278.
29. *Григорьев А.И., Синкевич О.А.* К механизму развития неустойчивости капли жидкости в электростатическом поле // Изв. Ан СССР. МЖГ. 1985. № 6. С. 10–15.
30. *Tsamopolous J.A., Akylas T.R., Brown R.A.* Dynamics of charged drop break-up. // Proc. R. Soc., London. 1985. V. A401. P.67–88.
31. *Bohr N., Wheeler J.A.* The mechanism of nuclear fission // Phys. Rev. 1939. V. 56. P. 426–450.
32. *Basaran O.A., Scriven L.E.* Axisimmetric shapes and stability of isolated charged drops // Phys. Fluids. 1989. V.A1. № 5. P. 795–798.
33. *Basaran O.A., Scriven L.E.* Axisimmetric shapes and stability of charged drops in an external electric fields // Phys. Fluids. 1989. V.A1. № 5. P. 799–809.
34. *Schweizer J.W., Hanson D.N.* Stability limit of charged drops // J. Coll. Int. Sci. 1971. V.35. № 3. P.417–423.
35. *Grigor'ev A.I., Shiryaeva S.O.* The theoretical consideration of physical regularities of the electrostatic dispersion of liquids as aerosols // J. Aerosol Sci. 1994. V.25. № 6. P. 1079–1091.
36. *Григорьев А.И., Фирстов А.А.* Критические условия неустойчивости заряженной капли, имеющей форму сплюснутого сфероида // Электронная обработка материалов. 1992. № 6. С. 20–23.
37. *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* Критические условия неустойчивости сплюснутой сфероидальной сильно заряженной капли. // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып.7. С.10–14.
38. *Щукин С.И., Григорьев А.И.* Устойчивость заряженной капли, имеющей форму трехосного эллипсоида // ЖТФ. 1998. Т.68. Вып.11. С.48–51.
39. *Natarajan R., Brown R.A.* Quadratic resonance in the three-dimensional oscillation of inviscid drops with surface tension // Phys. Fluids. 1986. V. 29. № 9. P. 2788–2797.
40. *Natarajan R., Brown R.A.* Third-order resonance effects and the nonlinear stability of drops oscillations // J. Fluid Mech. 1987. V.183. P.95–121.
41. *Trinch E., Wang T.G.* Large amplitude free and driven drop-shape oscillations: experimental observations // J. Fluid Mech. 1982. V.122. P.315–338.
42. *Jakobi N., Croonquist A.P., Elleman D.D., Wang T.G.* Acoustically induced oscillations and rotation of a large drop in Space // Proc. 2-nd Int. Colloq. on Drop and Bubbles. Pasadena: 1982. JPL Publication 82-7. P.31
43. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М., 1984.
44. *Ширяева С.О.* Асимметрия нелинейного резонансного взаимодействия мод капиллярных осцилляций заряженной капли // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. Вып.22. С.76–83.
45. *Ширяева С.О.* О внутреннем резонансе мод нелинейно осциллирующей объемно заряженной диэлектрической капли // ЖТФ. 2003. Т.73. Вып.2. С.19–30.
46. *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Левчук Т.В.* Нелинейный аналитический асимптотический анализ осцилляций неосесимметричных мод заряженной струи идеальной жидкости // ЖТФ. 2004. Т.74. Вып.8. С. 6–14.
47. *Natarajan R., Brown R.A.* The role of three-dimensional shapes in the break-up charged drops // Proc. R. Soc., London. 1987. V.A410. P.209–227.
48. *Brown R.A., Scriven L.E.* The shape and stability of rotating liquid drop // Proc. R. Soc., London. 1980. V.A371. P.331–357.

49. *Pelekasis N.A., Tsamopolous J.A., Manolis G.D.* Equilibrium shape and stability of charged and conducting drops // Phys. Fluids. 1990. V.A2. № 8. P. 1328–1340.
50. *Taylor G.I.* Disintegration of water drops in an electric field // Proc. R. Soc., London. 1964. V.A280. P.383–397.
51. *Patzek T.W., Benner R.E., Basaran O.A., Scriven L.E.* Nonlinear oscillations of inviscid free drops // J. Coputational Physics. 1991. V.97. P. 489–515.
52. *Basaran O.A.* Nonlinear oscillations of viscous drops // J. Fluid Mech. 1992. V. 241. P.169–198.
53. *Lundgren T.S., Mansour N.N.* Oscillation of drops in zero gravity with weak viscous effects // J. Fluid Mech. 1988. V. 194. P. 479–510.
54. *Becker E., Hiller W.J., Kowalewski T.A.* Nonlinear dynamics of viscous droplets // J. Fluid Mech. 1994. V. 258. P.191–216.
55. *Baker G.R., Merion D.I., Orzag S.A.* Generalized vortex methods for free-surface flow problems // J. Fluid Mech. 1982. V.123. P. 477–501.
56. *Millikan C.B.* On the steady motion of viscous, incompressible fluids; with particular reference to a variation principle // Phil. Mag. 1929. V.7. S.7. № 44. P. 641–662.
57. *Bateman H.* On dissipative systems and related variational principles // Phys. Rev. 1931. V. 38. August 15. P. 815–819.
58. *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* Нелинейные движения вязкой жидкости со свободной поверхностью // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 2. С. 184–192.
59. *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* Нелинейные периодические волны на заряженной поверхности вязкой электропроводной жидкости // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 11. С. 37–45.
60. *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* Нелинейные периодические волны на заряженной поверхности глубокой электропроводной маловязкой жидкости // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 3. С. 5–13.
61. *Ширяева С.О., Белоножко Д.Ф., Световой В.Б., Григорьев А.И.* Формулировка задач об аналитическом расчете нелинейных движений вязкой жидкости со свободной поверхностью. Препринт №31. ИМИ РАН. Ярославль, 2001.
62. *Becker E., Hiller W.J., Kowalewski T.A.* Experimental and theoretical investigation of large amplitude oscillations of liquid droplets // J. Fluid Mech. 1991. V. 231. P. 189–210.
63. *Ширяева С.О.* Нелинейные осцилляции заряженной капли при начальном возбуждении соседних мод // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 4. С. 15–22.
64. *Wang T.G., Anilkumar A.V., Lee C.P.* Oscillations of liquid drops: results from USML-1 experiments in Space // J. Fluid Mech. 1996. V. 308. P. 1–14.
65. *Azuma H., Yoshinara S.* Three-dimensional large-amplitude drop oscillations: experiments and theoretical analysis // J. Fluid Mech. 1999. V. 393. P. 309–332.
66. *Inculet I.I., Kroman R.* Breakup of large water droplets by electric fields // IEEE Transactions on Ind. Appl. 1992. V. 28. № 5. P. 945–948.
67. *Inculet I.I., Floryan J.M., Haywood R.J.* Dynamic of water droplets in electric fields // IEEE Transactions on Ind. Appl. 1989. V. 25. № 5. P. 1203–1209.
68. *Jong-Wook Ha, Seunng-Man Yang.* Deformation and breakup of Newtonian and non-Newtonian conducting drops in an electric field // J. Fluid Mech. 2000. V. 405. P. 131–156.

Поступила 22.09.04

Summary

Review of scientific publications on the theoretical and experimental investigations of nonlinear oscillations of charged drops is given. The stability of charged drops stability in reference to its own charge; as well as the influence of oscillation amplitude and internal resonance interaction on the drop stability are discussed.