

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ НЕЛИНЕЙНОГО РЕЗОНАНСНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МОД ЗАРЯЖЕННОЙ СТРУИ

*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия*

1. Исследование временной эволюции и дробления во внешних электрических полях движущихся заряженных струй представляет интерес в связи с многочисленными академическими, техническими и технологическими приложениями феномена. Оно неоднократно выполнялось в прошедшем столетии как экспериментально, так и теоретически в линейной и нелинейной постановках аналитическими и численными методами. Так, относительно недавно [1–8] экспериментально и теоретически анализировался вопрос о равновесных формах таких струй. Сделанные при этом выводы не всегда понятны, в частности теоретические исследования равновесных форм струй в [6–8] выполнены для осесимметричных волн, описываемых функциями Бесселя более высоких порядков, чем нулевой, тогда как реально осесимметричные волны на поверхности струи описываются функциями Бесселя только нулевого порядка. В [9–23] основной акцент был сделан на исследовании устойчивости заряженных струй по отношению к бесконечно малым периодическим деформациям. Теоретические исследования в этом направлении выполнялись в линейном приближении по амплитуде деформации для осесимметричных мод, а основным результатом проведенных расчетов было дисперсионное уравнение, на основе которого изучалась устойчивость струи. Однако получаемые в различных математических постановках дисперсионные уравнения не лишены недостатков: в [19], например, допущена ошибка при записи компоненты дисперсионного уравнения, характеризующей давление электрического поля, а в [21–23], где предполагалось исследовать влияние эффекта релаксации электрического заряда на струе на ее устойчивость неверно выписано уравнение баланса поверхностного заряда (отсутствует слагаемое, связанное с кривизной поверхности струи), следовательно, неверны и полученные результаты.

В работах [24–32] исследовалась нелинейная устойчивость незаряженных струй в отсутствие внешних электрических полей. Строгие аналитические асимптотические расчеты выполнены лишь в приближении идеальной жидкости. Имеющиеся нелинейные анализы для струй вязкой жидкости [30–33] проведены либо численно [30–31, 33] при достаточно произвольных допущениях, либо для весьма грубых математических моделей [32, 33]. Так, в [32] использованы приближенные одномерные уравнения, выведенные в предположении, что поперечный масштаб изменения поля скоростей много меньше продольного, и справедливы лишь для весьма длинных волн. Во всяком случае, допущения, принятые при выводе этих уравнений, не справедливы, а эти уравнения незаконны при описании финальной стадии распада струи на капли, на что указывалось еще в [34]. Единственная работа, посвященная исследованию нелинейной устойчивости заряженной поверхности струи [33], выполнена численными методами для струи вязкой жидкости конечной длины, но для грубой математической модели при весьма произвольных допущениях.

Несмотря на упомянутые многочисленные исследования устойчивости и дробления заряженных струй, многое в физике остается до сих пор не выясненным и по-прежнему привлекает внимание ученых. Сказанное, в частности, относится к анализу устойчивости неосесимметричных мод осцилляций. И связано это с тем, что большая часть ранее проведенных по этому вопросу исследований была ориентирована на получение потоков монодисперсных капель, проблема же спонтанного распада сильно заряженных струй, выбрасываемых с вершин свободно падающих капель [35] и менисков жидкости на торцах капилляров [10, 14, 36–38], до сих пор исследована весьма поверхностно. В экспериментальных работах [10, 14, 35–38] зафиксировано «хлыстообразное» движение конца распадающейся на капли струи, что связано согласно [39, 40] с возбуждением неосесимметричных мод ка-

пилярных осцилляций струи.

В связи со сказанным нами будет проведено аналитическое асимптотическое исследование нелинейных осцилляций неосесимметричных волн на поверхности заряженной идеально проводящей струи (в линейной постановке эта задача была рассмотрена в [39, 40]) в рамках метода многих масштабов, использованного ранее в [24] для изучения нелинейных осцилляций незаряженной струи.

2. Рассмотрим движущуюся с постоянной скоростью \vec{U}_0 бесконечную струю постоянного радиуса R идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости с плотностью ρ и коэффициентом поверхностного натяжения σ . Примем, что внешняя среда отсутствует, однако в окружающем струю пространстве создано электростатическое поле, перпендикулярное оси струи. Вследствие этого на поверхности распределен заряд, поверхностная плотность которого в равновесном состоянии, то есть в условиях отсутствия каких-либо возмущений цилиндрической формы струи, имеет величину χ .

Исследование проведем в цилиндрической системе координат, начало которой движется со скоростью \vec{U}_0 , а ось OZ направлена вдоль струи по направлению ее движения: $\vec{n}_z \parallel \vec{U}_0$. Очевидно, что в такой системе координат поле скоростей движения жидкости в струе будет полностью определяться капиллярными колебаниями ее поверхности.

Проследим эволюцию во времени распространяющейся по поверхности струи в положительном направлении оси OZ неосесимметричной волны с волновым числом k , амплитуда которой мала по сравнению с радиусом струи.

Все рассмотрение проведем в безразмерных переменных, приняв в качестве основных единиц R , ρ , σ (то есть, полагая, $R = \rho = \sigma = 1$). В этом случае уравнение свободной поверхности струи, возмущенной капиллярным волновым движением, запишется в виде $r = 1 + \xi(\varphi, z, t)$, где $|\xi| \ll 1$, r , φ , z – цилиндрические координаты, t – время, ξ – функция, описывающая искажение равновесной цилиндрической формы струи.

В рамках модели потенциального течения математическая формулировка задачи о расчете временной эволюции виртуального волнового возмущения поверхности струи будет иметь вид

$$\begin{aligned} \Delta\Psi &= 0, & \Delta\Phi &= 0 \\ r \rightarrow 0: & |\nabla\Psi| \rightarrow 0; & r \rightarrow \infty: & |\nabla\Phi| \rightarrow 0; \\ r = 1 + \xi: & \frac{\partial F}{\partial t} + \nabla\Psi \cdot \nabla F = 0; & F(r, \varphi, z, t) &\equiv r - [1 + \xi(\varphi, z, t)]; \\ \Delta P - \frac{\partial\Psi}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla\Psi)^2 + \frac{1}{8\pi}(\nabla\Phi)^2 - \nabla \cdot \vec{n} &= 0; & \Phi &= \Phi_s(t). \end{aligned}$$

Здесь ΔP – перепад давлений внутри и вне струи в равновесном состоянии ($\xi = 0$, $\Psi = 0$); предпоследнее и последнее слагаемые – давления электрического поля и сил поверхностного натяжения соответственно; \vec{n} – вектор нормали к поверхности струи: $\vec{n} = \nabla F / |\nabla F|$.

Сформулированную краевую задачу следует дополнить условиями сохранения заряда и объема участка струи, длина которого равна длине волны $\lambda = 2\pi/k$:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4\pi} \oint_S (\vec{n} \cdot \nabla\Phi) r \cdot d\varphi \cdot dz = 2\pi\chi\lambda; & \quad S = \begin{cases} r = 1 + \xi(\varphi, z, t); \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \\ z_0 \leq z \leq z_0 + \lambda; \end{cases} \\ \int_V r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz = \pi\lambda; & \quad V = \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 + \xi(\varphi, z, t); \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \\ z_0 \leq z \leq z_0 + \lambda. \end{cases} \end{aligned}$$

Для полного замыкания выписанной системы уравнений необходимо задать еще начальные условия. Однако в силу того, что начальные условия произвольного вида могут привести к чрезмерной громоздкости получаемого решения, в нелинейных задачах об отыскании периодических волновых профилей поверхности идеальной жидкости принято выбирать начальные условия так, чтобы

решение принимало наиболее простой вид [24]. Поэтому примем, что в начальный момент времени скорости всех точек свободной поверхности струи нулевые, а форма струи определена выражением

$$r = 1 + \varepsilon \left[\left(\zeta^{(+)}(\varepsilon \cdot t) \cdot \exp(im\varphi) + \zeta^{(-)}(\varepsilon \cdot t) \cdot \exp(-im\varphi) \right) \cdot \exp(i\theta) + (к.с.) \right] + O(\varepsilon^2),$$

где $\theta \equiv k \cdot z - \omega_m(k) \cdot t$, $\omega_m(k)$ – частота волны с волновым числом k и азимутальным числом m ; аббревиатура «к.с.» означает комплексно сопряженные слагаемые; ε – малый параметр, в качестве которого возьмем отношение амплитуды волны к радиусу струи; $\zeta^{(\pm)}(\varepsilon \cdot t)$ – амплитудные коэффициенты, являющиеся функциями времени.

Будем искать методом профиля струи, совершающей нелинейные неосесимметричные осцилляции, в виде разложения по ε с точностью до второго порядка малости включительно.

3. В нулевом приближении будем иметь равновесное состояние, которому соответствует неподвижный (в движущейся системе координат) цилиндрический столб жидкости с постоянной поверхностной плотностью заряда χ . Электрическое поле в окрестности невозмущенного однородно заряженного цилиндрического столба определяется потенциалом

$$\Phi^{(0)}(r) = -4\pi\chi \ln(r).$$

Динамическое граничное условие в нулевом приближении позволяет определить равновесный перепад давлений на поверхности струи

$$\Delta p = 1 - 2\pi\chi^2.$$

4. Решая сформулированную задачу с точностью до слагаемых второго порядка малости, можно найти форму струи как функцию времени в виде выражения

$$r(z, \varphi, t) = 1 + \varepsilon \cdot \cos(m\varphi) \cdot \cos(\theta) - \frac{\varepsilon^2}{8} \cdot [1 - (a_1 \cdot \cos(2m\varphi) + a_2) \cdot \cos(2\theta) - a_3 \cdot \cos(2\varphi)];$$

$$a_1 \equiv \frac{2G_{2m}(2k) \cdot [Y_1 + \chi L \cdot H_{2m}(2k)] + 2\omega_m(k) X_1}{4\omega_m^2(k) - \omega_{2m}^2(2k)}; \quad G_m(k) \equiv \frac{k \cdot I'_m(k)}{I_m(k)}; \quad H_m(k) \equiv \frac{k \cdot K'_m(k)}{K_m(k)};$$

$$a_2 \equiv \frac{2G_0(2k) \cdot [Y_2 + \chi L \cdot H_0(2k)] + 2\omega_m(k) X_2}{4\omega_m^2(k) - \omega_0^2(2k)}; \quad a_3 \equiv \frac{2(Y_3 - 2m\chi L)}{(1-2m)(1+2m-4\pi\chi^2)};$$

$$X_1 = \frac{\omega_m(k)}{G_m(k)} [2(k^2 + m^2) - G_m(k)]; \quad X_2 = \frac{\omega_m(k)}{G_m(k)} [2k^2 - G_m(k)];$$

$$Y_1 = 1 + \frac{1}{2}(k^2 - 5m^2) + \frac{\omega_m^2(k)}{2(G_m(k))^2} [k^2 + m^2 - 3(G_m(k))^2] +$$

$$+ 2\pi\chi^2 [3k^2 + 3m^2 - 3 - 4H_m(k) - (H_m(k))^2];$$

$$Y_2 = 1 + \frac{1}{2}(k^2 - 3m^2) + \frac{\omega_m^2(k)}{2(G_m(k))^2} [k^2 - m^2 - 3(G_m(k))^2] +$$

$$+ 2\pi\chi^2 [3k^2 + m^2 - 3 - 4H_m(k) - (H_m(k))^2];$$

$$Y_3 = 1 - \frac{1}{2}(k^2 + 5m^2) + \frac{\omega_m^2(k)}{2(G_m(k))^2} [k^2 - m^2 - (G_m(k))^2] +$$

$$+ 2\pi\chi^2 [k^2 + 3m^2 - 3 - 4H_m(k) - (H_m(k))^2]; \quad L = -2\pi\chi [1 + 2H_m(k)];$$

$$\omega_m^2(k) = \frac{k \cdot I'_m(k)}{I_m(k)} \left[k^2 + m^2 - 1 + W \cdot \left(1 + \frac{k \cdot K'_m(k)}{K_m(k)} \right) \right]; \quad W \equiv 4\pi \cdot \chi^2.$$

Расчеты по полученным выражениям при $\varepsilon = 0,3$ и докритических в смысле реализации неустойчивости струи по отношению к поверхностному заряду значениях параметра W в пакете аналитических вычислений «Matematica» иллюстрируются рис.1, где для первой и третьей мод ($m = 1, 3$) приведены трехмерные изображения поверхности нелинейно осциллирующих струй в

момент времени: $t = 0,25 T$, где T – период волн. Критическое в смысле реализации неустойчивости струи по отношению к поверхностному заряду (проявляющейся в дроблении струи на капли) для фиксированного m значение параметра W , характеризующего давление электрического поля на поверхность струи, находится из требования обращения в ноль квадрата частоты в дисперсионном уравнении [39, 40]: $\omega_m^2(k) = 0$. Напомним, что для $m = 0$ картинка, аналогичная приведенным рисункам представляет собой правильное чередование осесимметричных расширений и сжатий на поверхности цилиндрической струи.

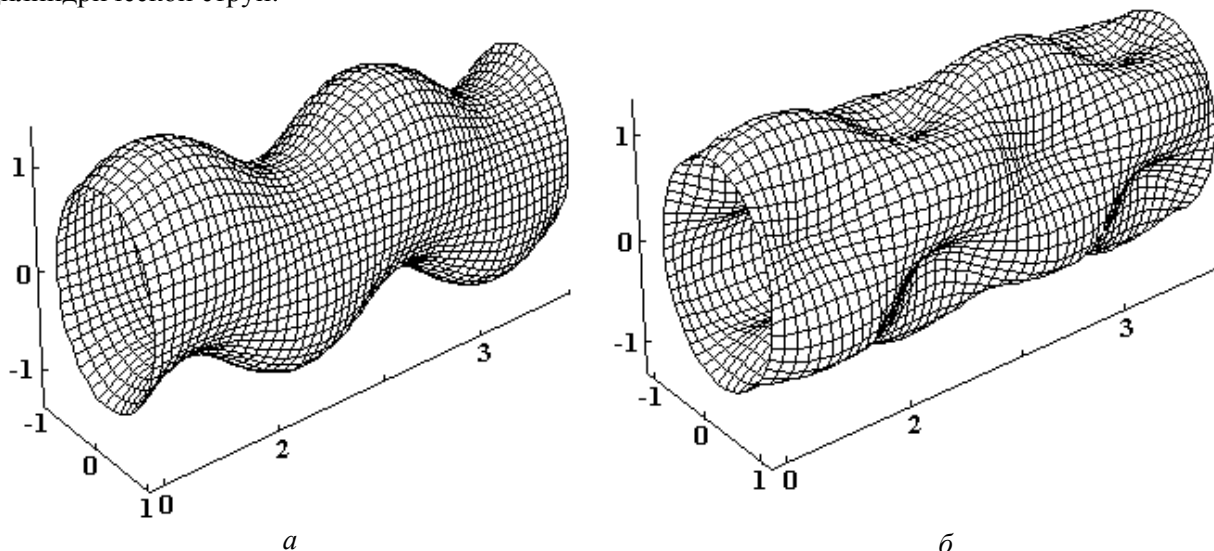


Рис. 1. Формы поверхности нелинейно осциллирующих струй при докритических в смысле устойчивости по отношению к собственному заряду значениях поверхностной его плотности, рассчитанные при $\varepsilon = 0,3$, $W=1$, $k=2$: а) $m=1$; б) $m=3$

Из приведенных рисунков видно, что, по всей видимости, возбуждение «хлыстообразного» движения струй [39, 40] связано с одновременным возбуждением моды с $m = 1$ и одной из более высоких мод с $m \geq 2$. Видно также, что при реализации неустойчивости неосесимметричных волн с высокими значениями азимутального числа m повышается вероятность полидисперсного распада струи, как это и наблюдается в естественных условиях при спонтанном распаде сильно заряженных (необходимое условие для обеспечения реализации неустойчивости неосесимметричных мод с $m \geq 1$) струй [39, 40]. Расчеты также показывают, что с увеличением плотности электрического заряда амплитуды волн растут.

Из выписанного уравнения для формы струи несложно видеть, что кроме волны с волновым числом k , существующей в начальный момент времени, возбуждается также (за счет нелинейного взаимодействия) волна с удвоенным волновым числом $2k$. Между этими двумя волнами имеет место резонансное взаимодействие, определяющееся наличием у коэффициентов a_1 и a_2 знаменателей, которые при определенных условиях обращаются в ноль. Отметим, что при резонансном взаимодействии нелинейных осцилляций и волн возможен стопроцентный обмен энергией между ними. Кроме того, примечательно, что резонансно взаимодействуют волны с различными волновыми и азимутальными числами, то есть с различной симметрией, как это видно из выражений для коэффициентов a_1 и a_2 . На рис. 2 приведен график зависимости $F \equiv 4\omega_m^2(k) - \omega_{2m}^2(2k)$ при $m = 0$ (определяющей величину знаменателя в коэффициенте a_1 , а также в коэффициенте a_2 при $m = 0$) от величины волнового числа k и параметра W , пересеченной плоскостью $F = 0$. На кривой $f_1(k, W)$ по которой пересекаются эти две поверхности, реализуется резонансное взаимодействие между двумя осесимметричными модами ($m=0$) для волн с волновыми числами k и $2k$. Резонансный обмен энергией между двумя осесимметричными волнами разной длины (заданной в начальный момент времени с волновым числом k и волной с вдвое большим волновым числом $2k$, возбуждение которой происходит в результате нелинейного взаимодействия) на стадии дробления струи может привести к образованию «сателлитов» - капель с размерами, отличающимися от размеров капель, на которые разбивается струя при отсутствии возмущающих воздействий. Из рис. 2 можно видеть, что указанное взаимодействие имеет место только при $W \neq 0$.

$$f_1(k, W) \equiv 4\omega_m^2(k) - \omega_{2m}^2(2k) = 0,$$

$$f_1(k, W) \equiv \frac{2k \cdot I_1(2k) \{1 - 4k^2 - W[1 - (2k \cdot K_1(2k))/K_0(2k)]\}}{I_0(2k)} - \frac{4k \cdot I_1(k) \{1 - k^2 - W[1 - (k \cdot K_1(k))/K_0(k)]\}}{I_0(k)},$$

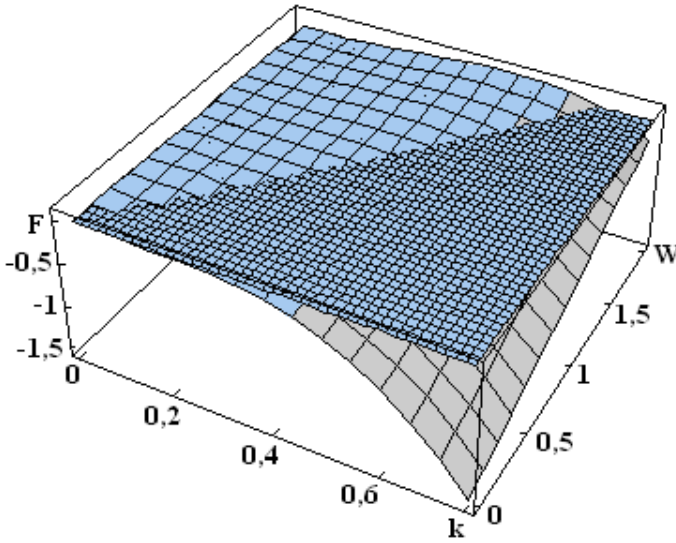


Рис. 2. График зависимости $F \equiv 4\omega_m^2(k) - \omega_{2m}^2(2k)$ от величины волнового числа k и параметра W (амплитудные коэффициенты a_1 и a_2 становятся бесконечно большими)

Расчеты на основе соотношения $4\omega_m^2(k) - \omega_{2m}^2(2k) = 0$ показывают, что резонансная перекачка энергии из заданной в начальный момент времени неосесимметричной моды с $m = 1$ и волновым числом k в другую неосесимметричную моду с $m = 2$ и с вдвое большим волновым числом $2k$ может реализоваться только при достаточно больших значениях поверхностной плотности заряда на струе (при $W \geq 3$), как это видно из рис. 3.

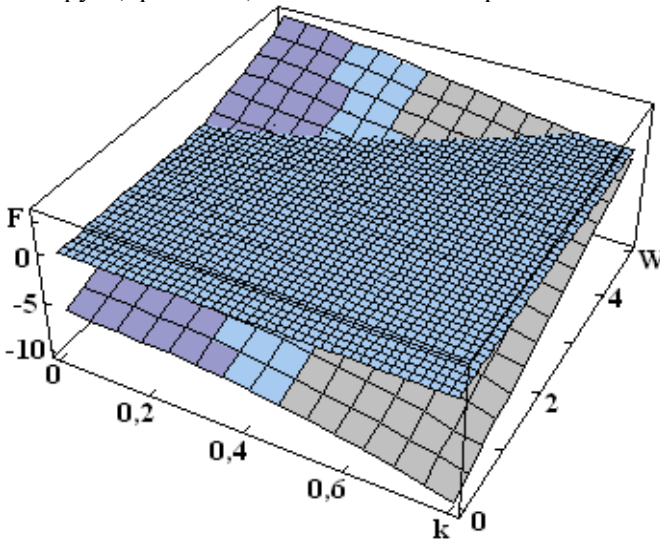


Рис. 3. График зависимости $F \equiv 4\omega_m^2(k) - \omega_{2m}^2(2k)$ от величины волнового числа k и параметра W при $m=1$, пересеченный плоскостью $F=0$. На линии пересечения указанных поверхностей реализуется нелинейное резонанное взаимодействие неосесимметричных волн (амплитудный коэффициент a_2 становится бесконечно большим)

Из вида амплитудного коэффициента a_2 видно, что возможно резонансное взаимодействие между осесимметричной модой $m = 0$ и неосесимметричными модами с $m \neq 0$. На рис. 4 приведен график зависимости $F \equiv 4\omega_m^2(k) - \omega_0^2(2k)$ при $m = 1$ (определяющей величину знаменателя в коэффициенте a_2) от величины волнового числа k и параметра W , пересеченной плоскостью $F = 0$. На кривой $f_0(k, W)$, по которой пересекаются эти две поверхности, реализуется резонансное взаимодействие между заданной в начальный момент времени неосесимметричной волной с $m = 1$ и волновым числом k и осесимметричной волной $m = 0$ с волновым числом $2k$. При таком взаимодействии энергия перекачивается из неосесимметричной моды с $m = 1$ к осесимметричной моде с удвоенным волновым числом. Из рис. 4 видно, что такой резонансный обмен энергией может иметь место и при отсутствии на струе электрического заряда (при $W = 0$).

$$f_0(k, W) \equiv 4\omega_m^2(k) - \omega_0^2(2k) = 0,$$

$$f_0(k, W) \equiv \frac{2k \cdot I_1(2k) \{1 - 4k^2 - W[1 - (2k \cdot K_1(2k))/K_0(2k)]\}}{I_0(2k)} + \\ + \frac{2k[I_0(k) + I_2(k)] \cdot \{k^2 + W[1 - (k[K_0(k) + K_2(k)])/2K_1(k)]\}}{I_1(k)}.$$

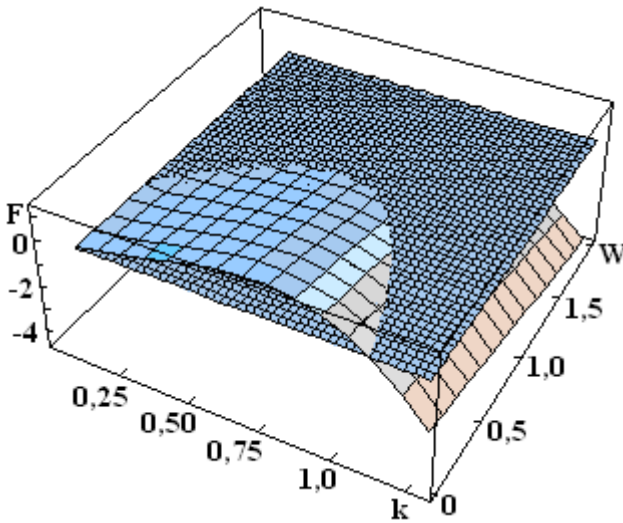


Рис.4. График зависимости $F \equiv 4\omega_m^2(k) - \omega_0^2(2k)$ от величины волнового числа k и параметра W (амплитудный коэффициент a_2 становится бесконечно большим)

Расчеты также показывают, что резонансное взаимодействие с перекачкой энергии от неосесимметричной моды с $m = 2$ к осесимметричной возможно только при достаточно больших плотностях поверхностного заряда на струе (при $W \geq 3$).

Влияние величины поверхностной плотности электрического заряда на струе χ на закономерности реализации резонансного взаимодействия сводится к изменению положений резонансов (к изменению волновых чисел и азимутальных параметров взаимодействующих волн при варьировании χ). Вдали от положений резонансов влияние электрического заряда, имеющегося на поверхности струи, сводится к появлению возможности развития неустойчивости неосесимметричных мод при достаточно больших плотностях заряда (при $4\pi\chi^2 \geq 1$) [39, 40]. Напомним, что в отсутствие заряда (при $\chi = 0$) все неосесимметричные моды устойчивы, что следует из дисперсионного уравнения. Влияние заряда (объемного либо поверхностного) на форму струи реализуется через зависимость от его плотности χ коэффициентов a_j , определяющих отклонение второго порядка малости формы струи от цилиндрической.

Следует также отметить, что в [41] для незаряженной струи нелинейное возбуждение осесимметричных мод с частотами, кратными возбужденной, в начальный момент исследовано экспериментально: во всяком случае в [41] показано, что нелинейное возбуждение мод, кратных изначально возбужденной, имеет место.

5. Проведенное рассмотрение выполнено для ситуации, когда начальная деформация струи определяется одной модой. Это обстоятельство накладывает ограничение на общность сделанных выводов. Представляется целесообразным решить задачу о расчете нелинейных неосесимметричных осцилляций струи, когда начальная деформация струи определяется суперпозицией различных мод. Такая задача позволила бы более детально исследовать перенос энергии между модами, а также взаимодействие волн различной природы, например капиллярных и релаксационных (последнее возможно лишь при корректном учете вязкости жидкости). Отметим, что подобная задача для незаряженной струи решена в [42] численными методами, что, естественно, накладывает ограничение на гносеологическую ценность полученных результатов: так, весьма проблематичным при таком подходе становится исследование внутренних нелинейных резонансов.

В [27] сходная задача решена аналитическими асимптотическими методами, но в отличие от задачи, решенной выше, в [27] в начальный момент времени задавалась не форма струи, а поле скоростей, которое в соответствии с вышесказанным представлялось в виде суперпозиции двух мод. Такая постановка целесообразна при изучении закономерностей вынужденного капиллярного распада струи (более подробно см. монографию [43]), при исследовании закономерностей сателлитообразования, что и было сделано в [30, 31] численными методами.

6. Заключение. Решение задачи о расчете нелинейных осцилляций заряженной струи уже во втором порядке малости по амплитуде деформации невозмущенной цилиндрической струи позволяет

обнаружить резонансное взаимодействие волны, определяющей начальную виртуальную деформацию, с волной, появляющейся вследствие нелинейности уравнений гидродинамики и имеющей вдвое большее волновое число. Положение резонансных ситуаций зависит от величины волнового числа и поверхностной плотности электрического заряда на струе. В частности, осесимметричная мода может взаимодействовать с модой, ответственной за закручивание струи ($m = 1$). При нелинейном резонансном взаимодействии волн на заряженной струе энергия всегда перекачивается от более длинных волн к более коротким независимо от симметрии взаимодействующих волн. Из начально возбужденной моды с $m = 1$ энергия может перекачиваться как в осесимметричную моду с вдвое большим волновым числом, так и в неосесимметричную с $m = 2$, также с вдвое большим волновым числом. Вовлечение в нелинейное резонансное взаимодействие мод с $m \geq 2$ возможно лишь при значительных плотностях поверхностного заряда на струе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кириченко В.Н., Петрянов-Соколов И.В., Супрун Н.Н., Шутов А.А. Асимптотический радиус слабопроводящей жидкой струи в электрическом поле // ДАН СССР. 1986. Т. 289. № 4. С. 817–820.
2. Кириченко В.Н., Супрун Н.Н., Петрянов-Соколов И.В. Области существования свободных стационарных жидких струй в сильном внешнем электрическом поле // ДАН СССР. 1987. Т. 295. № 2. С. 308–311.
3. Кириченко В.Н., Супрун Н.Н., Петрянов-Соколов И.В. Форма свободной стационарной жидкой струи в сильном однородном электрическом поле // ДАН СССР. 1987. Т. 295. № 4. С. 553–555.
4. *Canan-Calvo A.M.* On the theory of electrohydrodynamically driven capillary jets // J. Fluid Mechanics. 1997. V. 335. P. 165–188.
5. Шутов А.А., Захарьян А.А. Заряженная струя несжимаемой жидкости в электрическом поле // ПМТФ. 1998. Т. 39. № 4. С. 12–15.
6. Зубарев Н.М. Точное решение задачи о равновесной конфигурации двумерной заряженной жидко-металлической капли // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. Вып. 23. С. 55–60.
7. Зубарев Н.М. Точное решение задачи о равновесной конфигурации заряженной поверхности жидкого металла // ЖЭТФ. 1999. Т.116. № 6(12). С. 1990–2005.
8. Зубарев Н.М., Зубарева О.В. Анализ равновесных конфигураций заряженных цилиндрических струй проводящей жидкости // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30. Вып.1. С. 51–55.
9. Глонти Г. А. К теории устойчивости жидких струй в электрическом поле // ЖЭТФ. 1958. Т. 34. № 5. С. 1328–1330.
10. *Magarvey R., Outhouse L.* Note on the break up of charged liquid jet // J. Fluid Mech. 1962. Vol. 13. № 1. P. 151–157.
11. *Schneider J., Lindbland C., Hendrick Jr.* Stability of an electrified liquid jet // J. Appl. Phys. 1967. V. 38. № 6. P. 2599–2606.
12. *Michael D., O'Neil M.* Electrohydrodynamic instability of a cylindrical viscous jet // Can. J. Phys. 1969. V. 47. P. 1215–1220.
13. *Saville D.* Electrohydrodynamic stability: effect of charge relaxation at the interface of a liquid jet // J. Fluid Mech. 1971. V. 48. № 4. P. 815–827.
14. *Huebner A., Chu H.* Instability and breakup of charged liquid jets // J. Fluid Mech. 1971. Vol. 49. № 2. P. 361–372.
15. *Garmendia L., Smith I.* The effects of an electrostatic field and air stream on water jet break-up length // Can. J. Chem. Eng. 1975. V. 53. P. 606–610.
16. *Toraita Y., Sudou K., Tshibashi Y.* Effect of a magnetic and an electrical field on the behavior of liquid jets // Bull. JSME. 1979. V. 22. № 172. P. 1390–1398.
17. Кожевников В.И., Чеканов В.В., Литовский Е.И. Свободные вертикальные струи над деформированной поверхностью магнитной жидкости в электрическом поле // Магнитная гидродинамика. 1982. № 4. С.118–120.
18. *Grossmann S., Muller A.* Instabilities and decay rates of charged viscous liquid jets // Z. Phys. B: Condensed Matter. 1984. V. 57. P. 161–174.
19. Назин С.С., Изотов А.Н., Шикин В.Б. Об устойчивости заряженной струи // ДАН СССР. 1985. Т. 283. № 1. С. 121–125.

20. Герценштейн С.Я., Мусабеков П. М., Рудницкий А. Я., Уразов Ш. Н. Неустойчивость и распад наэлектризованных капиллярных струй // ДАН СССР. 1989. Т. 306. № 5. С. 1073–1077.
21. Гиневский А. Ф., Мотин А.И. Особенности капиллярного распада струй диэлектрической вязкой жидкости с поверхностным зарядом // ИФЖ. 1991. Т. 60. № 4. С. 576–581.
22. Mestel A.J. Electrohydrodynamic stability of a slightly viscous jet // J. Fluid Mech. 1994. Vol. 274. P. 93–113.
23. Mestel A.J. Electrohydrodynamic stability of a highly viscous jet // J. Fluid Mech. 1996. Vol. 312. № 2. P. 311–326.
24. Nayfeh F.H. Nonlinear stability of a liquid jet // Phys. Fluids. 1970. № 4. P. 841–847.
25. Rutland D., Jamerson G. A nonlinear effect in the capillary instability of liquid jets // J. Fluid Mech. 1971. V. 46. № 2. P. 267–271.
26. Новиков А.А. Нелинейные капиллярные волны на поверхности струи вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 2. С. 179–182.
27. Chaudhary K., Redekopp L. The nonlinear capillary instability of a liquid jet // J. Fluid Mech. 1980. V. 96. Pt. 1. P. 257–274.
28. Chaudhary K., Maxworthy T. The nonlinear capillary instability of a liquid jet // J. Fluid. Mech. 1980. Vol. 96. Pt. 2. P. 275–286.
29. Chaudhary K., Maxworthy T. The nonlinear capillary instability of a liquid jet. Part 3. Experiments on satellite drop formation and control // J. Fluid. Mech. 1980. V. 96. № 2. P. 287–298.
30. Блаженков В.В., Гиневский А.Ф., Гунбин В.Ф., Дмитриев А.С., Щеглов С.И. Нелинейная эволюция волн при вынужденном капиллярном распаде струй // Изв. АН СССР. МЖГ. 1993. № 3. С. 54–60.
31. Huynh H., Ashgriz N., Mashayek F. Instability of a liquid jet subject to disturbances composed of two wave numbers // J. Fluid Mech. 1996. Vol. 320. P. 185–210.
32. Чесноков Ю.Г. Нелинейное развитие капиллярных волн в струе вязкой жидкости // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 8. С. 31–38.
33. Горшков В.Н., Чабан М.Г. Нелинейные электрогидродинамические явления и генерация капель в заряженных проводящих струях // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 11. С. 1–9.
34. Ентов В.М., Ярин А.Л. Динамика свободных струй и пленок вязких и реологически сложных жидкостей // Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа. М., 1984. Т.17. С.112–197.
35. Macky W.A. Some investigations on the deformation and breaking of water drops in strong electric fields // Pros. Roy. Soc., London. 1931. V. 133. № A822. P. 565–587.
36. Cloupeau M., Prunet Foch B. Electrostatic spraying of liquids: main functioning modes // J. Electrostatics. 1990. V. 25. P. 165–184.
37. Kim K., Turnbull R. Generation of charged drops of insulating liquids by electrostatic spraying // J. Appl. Phys. 1976. V. 47. № 5. P. 1964–1969.
38. Hoburg J.F., Melcher J.R. Current-driven, corona terminated water jets as sources of charged droplets and audible noise // IEEE Transaction on Power Apparats System. 1975. V. 94. № 1. P. 128–136.
39. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Левчук Т.В., Рыбакова М.В. О спонтанном распаде заряженной струи вязкой электропроводной жидкости // ЭОМ. 2003. № 1. С. 38–43.
40. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Левчук Т.В. Об устойчивости неосесимметричных мод объемно заряженной струи вязкой диэлектрической жидкости // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 11. С. 22–30.
41. Аликин А.Р., Блаженков В.В., Гунбин В.Ф., Щеглов С.И. Исследование эволюции спектра колебаний поверхности струи при вынужденном капиллярном распаде // ИФЖ. 1991. Т. 60. № 4. С. 550–553.
42. Епихин Б.Е., Шкадов В.Я. Численное моделирование неоднородного распада капиллярных струй // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 3. С. 12–17.
43. Аметистов Е.В., Блаженков В.В., Городов А.К. и др. Монодиспергирование вещества: принципы и применение. М., 1991.

Поступила 16.02.04

Summary

The energy is aulwace transfer from long waves to more short one at a nonlinear resonant interaction of waves on charged liquid jet surface independently from its symmetry.