А.И Григорьев, В.А. Коромыслов, С.О. Ширяева, М.В. Волкова

О НЕЛИНЕЙНЫХ ОСЦИЛЛЯЦИЯХ ЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ В АЭРОДИНАМИЧЕСКОМ ПОТОКЕ

*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, 150000, г. Ярославль, Россия*

1. С заряженными каплями, движущимися относительно среды, приходится сталкиваться в многочисленных академических, технических и технологических приложениях (см., например, обзоры [1–4] и указанную там литературу). В частности, движущаяся относительно среды заряженная капля представляет интерес в связи с исследованием физического механизма инициирования разряда молнии [5, 6]. В соответствии с существующими представлениями зарождение разряда линейной молнии связано с зажиганием коронного разряда в окрестности крупной капли или обводненной градины, свободно падающей в грозовом облаке. Однако максимальные величины измеряемых в грозовых облаках собственных зарядов капель и электрических полей [7] намного меньше необходимых для реализации неустойчивости поверхности капли по отношению к собственному и индуцированному зарядам и зажиганию коронного разряда [8, 9]. Не исключено, что при исследовании устойчивости капли по отношению к поверхностному заряду упускается некий важный фактор, например, аэродинамическое давление в окрестности падающей капли, которое может привести к снижению критических условий реализации неустойчивости ее заряженной поверхности [8, 10]. В связи с этим и сформулировано настоящее исследование, тем более что нелинейный анализ осцилляций и устойчивости заряженной капли, движущейся относительно среды, до сих пор не проведен, тогда как методы аналитического расчета нелинейных осцилляций капель во внешней среде уже разработаны [11].

2. Пусть идеальная несжимаемая диэлектрическая среда с плотностью ρ_2 и диэлектрической проницаемостью ε_*, занимающая бесконечный объем, движется с постоянной скоростью $\vec{U}_0$ относительно неподвижной капли радиуса R несжимаемой идеально проводящей жидкости с плотностью ρ_1. Коэффициент поверхностного натяжения границы раздела сред обозначим σ, а полный заряд капли – Q. Примем, что в начальный момент времени $t = 0$ равновесная сферическая форма капли претерпела виртуальное осесимметричное возмущение конечной амплитуды, существенно меньшей радиуса капли, пропорциональное одной из мод капиллярных осцилляций системы, и исследуем нелинейные осцилляции капли при $t > 0$.

Для упрощения нижеследующих расчетов воспользуемся безразмерными переменными, в которых $R = \sigma = \rho_1 = 1$. Тогда в сферической системе координат с началом в центре масс капли уравнение границы раздела сред, возмущенной осесимметричным капиллярным волновым движением, будет иметь вид: $r = 1 + \xi(\theta, t), |\xi| << 1.$ Движения жидкости в капле и среде полагаем потенциальными, то есть примем, что поля скоростей волнового движения жидкости в капле $\vec{V} = \nabla\psi(\vec{r}, t)$ и среде $\vec{U} = \nabla\varphi(\vec{r}, t)$ определяются функциями потенциалов скоростей в капле $\psi(\vec{r}, t)$ и среде $\varphi(\vec{r}, t)$.

Математическая формулировка задачи расчета нелинейных осцилляций границы раздела сред состоит из системы уравнений Лапласа для потенциалов скоростей $\psi(\vec{r}, t)$ и $\varphi(\vec{r}, t)$ и электростатического потенциала $\Phi(\vec{r}, t)$:

$$\Delta\Phi(\vec{r},t)=0; \qquad \Delta\psi(\vec{r},t)=0; \qquad \Delta\varphi(\vec{r},t)=0;$$

$$r\to 0:\quad \psi(\vec{r},t)\to 0; \qquad r\to\infty:\quad \Phi(\vec{r},t)\to 0; \quad \nabla\varphi(\vec{r},t)\to\vec{U}_0;$$

$$r=1+\xi: \qquad \frac{\partial\xi}{\partial t}=\frac{\partial\psi}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial\xi}{\partial\theta}; \qquad \frac{\partial\psi}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial\xi}{\partial\theta}=\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\frac{\partial\xi}{\partial\theta};$$

$$-\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{1}{2}\left(\nabla\psi\right)^2+P_{in}+P_E-P_\sigma=-\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{\rho}{2}\left(\nabla\varphi\right)^2+P_{ex};$$

$$P_E=\frac{\varepsilon_*(\nabla\Phi)^2}{8\pi}; \qquad P_\sigma=div\ \vec{n}; \qquad \Phi(\vec{r},t)=\Phi_S(t).$$

$$-\frac{\varepsilon_*}{4\pi}\oint_S(\vec{n}\cdot\nabla\Phi)dS=Q; \qquad S=\begin{cases} r=1+\xi(\theta,t);\\ 0\le\theta\le\pi;\\ 0\le\vartheta\le 2\pi;\end{cases}$$

$$\int_{V_1} r^2dr\cdot sin\theta d\theta d\vartheta=\frac{4}{3}\pi; \qquad V_1=\begin{cases} 0\le r\le 1+\xi(\theta,t);\\ 0\le\theta\le\pi;\\ 0\le\vartheta\le 2\pi;\end{cases} \qquad t=0:$$

$$\xi(\theta,t)=\xi_0\cdot P_0(\cos\theta)+\varepsilon\cdot P_k(\cos\theta);\ (k\ge 2);$$

$$\xi_0(\theta,t)=-\varepsilon^2\frac{1}{(2k+1)}+O(\varepsilon^3); \qquad \frac{\partial\xi(\theta,t)}{\partial t}=0. \tag{1}$$

Здесь ε – амплитуда начального возмущения, являющаяся малым параметром задачи; $P_k(\cos\theta)$ – полином Лежандра k-го порядка; P_{in} и P_{ex} – давления в капле и среде соответственно; P_E – давление электрического поля собственного заряда капли на границу раздела сред; P_σ – лапласовское давление; $\vec{n}$ – единичный вектор положительной нормали к поверхности капли; $\Phi_S(t)$ – постоянный вдоль поверхности капли электростатический потенциал; $\rho_2/\rho_1\equiv\rho$.

Зададимся целью найти во втором порядке малости по амплитуде начальной деформации образующую формы капли, совершающей осесимметричные осцилляции.

3. Задачу (1) будем решать методом многих масштабов. Для этого искомые функции $\xi(\theta,t)$, $\psi(\vec{r},t)$, $\varphi(\vec{r},t)$, $\Phi(\vec{r},t)$ представим в виде рядов по степеням малого параметра ε и рядов по полиномам Лежандра и будем считать зависящими не просто от времени t, а от разных его масштабов $T_m=\varepsilon^m t$:

$$\xi(\theta,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}M_n^{(m)}(T_0,\ T_1,\ ...)\cdot P_n(\cos\theta); \qquad \psi(\vec{r},t)=\sum_{m=0}^{\infty 1}\sum_{n=0}^{\infty}E_n^{(m)}(T_0,\ T_1,\ ...)\cdot r^n\cdot P_n(\cos\theta);$$

$$\varphi(\vec{r},t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}G_n^{(m)}(T_0,\ T_1,...)r^{-n-1}P_n(\cos\theta);$$

$$\Phi(\vec{r},t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}F_n^{(m)}(T_0,\ T_1,...)\cdot r^{-(n+1)}\cdot P_n(\cos\theta), \tag{2}$$

где коэффициенты $M_n^{(m)},\ E_n^{(m)},G_n^{(m)},F_n^{(m)}$ имеют m-й порядок малости по ε.

Подставляя разложения (2) в сформулированную краевую задачу и приравнивая в каждом из уравнений слагаемые одного порядка малости, несложно получить набор краевых задач для последовательного определения неизвестных коэффициентов $M_n^{(m)},\ E_n^{(m)},G_n^{(m)},F_n^{(m)}$.

Нижеследующее изложение ввиду конечности объема статьи ограничим расчетом коэффициентов $M_n^{(m)}(T_0,T_1)$, где m = 1; 2. Остальные коэффициенты разложений (2) выражаются через $M_n^{(j)}(T_0,T_1)$ и их можно найти после несложных, но громоздких вычислений.

4. В первом порядке малости по ε для определения неизвестных коэффициентов $M_n^{(1)}(T_0,T_1)$ получается бесконечная система связанных дифференциальных уравнений:

$$M_0^{(1)}(T_0,T_1,...)\equiv 0;\ M_1^{(1)}(T_0,T_1,...)\equiv 0;$$

$$n\ge 2: \qquad A_n M_{n-2}^{(1)}(T_0,T_1,...)+B_n\frac{\partial M_{n-1}^{(1)}(T_0,T_1,...)}{\partial T_0}+\frac{\partial^2 M_n^{(1)}(T_0,T_1,...)}{\partial T_0^2}+$$

$$+\omega_n^2 M_n^{(1)}(T_0,T_1,...)+C_n\frac{\partial M_{n+1}^{(1)}(T_0,T_1,...)}{\partial T_0}+D_n M_{n+2}^{(1)}(T_0,T_1,...)=0; \qquad (3)$$

$$A_n=\frac{9}{4}U^2\rho\chi(n)\frac{n^2(n-1)(n-2)}{(2n-3)(2n-1)} \qquad B_n=\frac{3}{2}U\rho n\chi(n);$$

$$C_n=\frac{3}{2}U\rho\chi(n)\frac{n(2n+1)}{2n+3};\ D_n^{(1)}=\frac{9}{4}U^2\rho\chi(n)\frac{n^2(n+1)(n+2)}{(2n+3)(2n+5)};$$

$$\omega_n^2=\chi(n)\left(n(n-1)(n+2-W)-\frac{9}{2}U^2\rho\frac{n^2((2n+1)(n^2-1)+3)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}\right);$$

$$W=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_*};\quad \chi(n)=\left(1+\rho\frac{n}{n+1}\right)^{-1};\ \Phi_S^{(1)}\equiv 0.$$

Несложно видеть, что при U = 0, то есть в случае неподвижной среды, линейное взаимодействие мод, определяемое (3), исчезает и получаем систему несвязанных (не взаимодействующих между собой) гармонических осцилляторов. При U = 0 система связанных дифференциальных уравнений (3) распадается на совокупность несвязанных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, определяющих гармонические осцилляции отдельных мод (как это получено ранее [10] для ситуации осцилляций заряженной капли несжимаемой жидкости, покоящейся относительно несжимаемой диэлектрической среды). Таким образом, причиной появления линейного по малому параметру взаимодействия мод является наличие движения внешней среды. При этом согласно (3) n-я мода взаимодействует с четырьмя ближайшими: с (n-2)-й, (n-1)-й, (n+1)-й, (n+2)-й. Ранее взаимодействие мод в линейном приближении по малому параметру обнаружено в случае плоской границы раздела несмешивающихся между собой идеальных несжимаемых сред, одна из которых поступательно движется параллельно границе раздела [12], то есть в ситуации, когда граница раздела способна претерпевать неустойчивость Кельвина–Гельмгольца. В [10] показано, что в случае обтекания капли потоком идеальной жидкости поверхность капли вовлекается в колебательное движение, характерное для этой неустойчивости.

Отметим еще один эффект взаимодействия капли с обтекающим ее потоком идеальной жидкости, обнаруживаемый в линейном приближении: согласно [8] капля сплющивается вдоль потока в сфероид с эксцентриситетом, зависящим от скорости потока и величины заряда капли. Возможные осцилляции капли должны происходить в окрестности равновесной сфероидальной формы. Однако степень сфероидальности при разумных скоростях (пока течение обтекающей каплю среды можно считать ламинарным), как правило, весьма мала. Согласно [8] амплитуда обсуждаемой сфероидальной деформации $M_2^{(1)}=\left(3\rho_2 RU^2/16\sigma\right)$ и, например, при расчетах обтекания капли с R = 100 мкм потоком воздуха, когда $\rho_2\approx$ 0,001 г/см, при любых разумных скоростях потока (пока $\mathrm{Re}=\left(R\cdot U/\nu\right)\le 20$, где ν − кинематическая вязкость среды) ею можно пренебрегать при расчетах второго порядка малости.

5. Для определения поправок второго порядка малости (отыскания коэффициентов $M_n^{(2)}$) получим систему связанных неоднородных дифференциальных уравнений гармонического типа:

$$M_0^{(2)}(T_0)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(M_n^{(1)}(T_0)\right)^2;$$

$$A_n \cdot M_{n-2}^{(2)}(T_0,T_1,...) + B_n \frac{\partial M_{n-1}^{(2)}(T_0,T_1,...)}{\partial T_0} + \frac{\partial^2 M_n^{(2)}(T_0,T_1,...)}{\partial T_0^2} + \omega_n^2 \cdot M_n^{(2)}(T_0,T_1,...) +$$

$$+ C_n \frac{\partial M_{n+1}^{(2)}(T_0,T_1,...)}{\partial T_0} + D_n \cdot M_{n+2}^{(2)}(T_0,T_1,...) = \chi(n) \cdot f_n(T_0); \qquad n \ge 1 \tag{4}$$

с нулевыми начальными условиями. Функции неоднородности $f_n(T_0)$ определяются через коэффициенты $M_n^{(1)}$, являющиеся решениями системы (3), и имеют весьма громоздкий вид. В нижеследующих построениях решение систем (3), (4) определим для частного случая капли, движущейся в воздухе, имея в виду естественное приложение результатов расчетов к процессам в грозовых облаках. Для такой ситуации относительная плотность среды ρ, определенная отношением плотности среды к плотности жидкости, будет весьма мала ($\rho \approx 10^{-3}$) и ее можно использовать в качестве второго малого параметра для отыскания асимптотических решений систем (3), (4), полагая $\varepsilon >> \rho$. В такой ситуации в нулевом приближении по ρ функции неоднородности $f_n(T_0)$ примут более компактный вид:

$$f_n(T_0) = \sum_{m=2}^{\infty}\sum_{l=2}^{\infty}\Big\{M_m^{(1)}(T_0)M_l^{(1)}(T_0)\Big\{K_{m,l,n}\Big(2n\big[l(l+1)-1\big]+$$
$$+W\frac{n}{2}\big[l(m+1)-m(2m-2n+7)+3\big]\Big) + \alpha_{m,l,n}W\frac{n}{2}\Big\}+$$
$$+\left[(m-n-1)K_{m,l,n} - \frac{\alpha_{m,l,n}}{m}\right]\times\frac{\partial M_m^{(1)}(T_0)}{\partial T_0}M_l^{(1)}(T_0)+$$
$$+\left[\left(m-1-\frac{n}{2}\right)K_{m,l,n} - \frac{n+2l}{2ml}\alpha_{m,l,n}\right]\times\frac{\partial M_m^{(1)}(T_0)}{\partial T_0}\frac{\partial M_l^{(1)}(T_0)}{\partial T_0}\Big\}; \tag{5}$$

$$K_{m,l,n} \equiv \left[C_{m0l0}^{n0}\right]^2; \qquad \alpha_{m,l,n} \equiv -\sqrt{m(m+1)l(l+1)}\; C_{m0l0}^{n0}\cdot C_{m-1l0}^{n0},$$

где C_{m0l0}^{n0} и C_{m-1l0}^{n0} – коэффициенты Клебша–Гордана [13]. Их присутствие обеспечивает существование конечного количества отличных от тождественного нуля функций неоднородности $f_n(T_0)$. Так при начальном возбуждении h моды будут отличны от нуля только коэффициенты Клебша–Гордана (и функции неоднородности) с четными номерами от 0 до 2h.

6. Система (3) однородная. В нулевом порядке по ρ: $A_n = B_n = C_n = B_n = 0$, и система (3) превращается в систему несвязанных гармонических уравнений. Поскольку начальные условия для всех мод, кроме возбужденной, в начальный момент времени нулевые, то отличной от нуля будет амплитуда только одной моды, возбужденной в начальный момент времени. Так, если в начальный момент времени возбуждена h мода с нулевой начальной фазой, то решение системы (3) в указанном порядке малости будет иметь вид

$$M_h^{(1)} = \varepsilon \cdot \cos(\omega_h \cdot T_0);\; M_n^{(1)} \equiv 0;\; n \ne h, \tag{6}$$

где частота определяется дисперсионным уравнением, выписанным в нулевом порядке малости по ρ:

$$\omega_h^2 = \big(h(h-1)(h+2-W)\big).$$

По найденным решениям $M_h^{(1)}$ выпишем выражения для функций неоднородности (5) системы (4) и решим ее в нулевом порядке малости по ρ.

Пусть в начальный момент времени возбуждена четвертая мода h = 4. Тогда в нулевом порядке малости по ρ бесконечная система связанных неоднородных уравнений (4) превратится в систему несвязанных уравнений гармонического типа, из которых только для четырех уравнений с n = 2,4, 6, 8 функции неоднородности будут отличны от тождественного нуля. В сочетании с нулевыми начальными условиями для всех мод, кроме изначально возбужденной четвертой, сказанное означает, что во втором порядке малости возбудятся за счет нелинейного взаимодействия только моды с n = 2,4, 6, 8. (Необходимо отметить, что будет возбуждена и нулевая мода, но ее осцилляции определятся из закона сохранения объема капли, а не из системы (4)). Соответствующие решения примут вид

$$M_2^{(2)} = \varepsilon^2\{\alpha_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \beta_2) + \frac{\mu_2^{(1)}}{\omega_2^2} - \frac{1}{4\omega_4^2 - \omega_2^2}[\mu_2^{(2)} \cdot \cos(2\omega_4 t) + \mu_2^{(3)} \cdot \sin(2\omega_4 t)]\};$$

$$M_4^{(2)} = \varepsilon^2\{\alpha_4 \cdot \cos(\omega_4 t + \beta_4) + \frac{\mu_4^{(1)}}{\omega_4^2} - \frac{1}{3\omega_4^2}[\mu_4^{(2)} \cdot \cos(2\omega_4 t) + \mu_4^{(3)} \cdot \sin(2\omega_4 t)]\};$$

$$M_6^{(2)} = \varepsilon^2\{\alpha_6 \cdot \cos(\omega_6 t + \beta_6) + \frac{\mu_6^{(1)}}{\omega_6^2} - \frac{1}{4\omega_4^2 - \omega_6^2}[\mu_6^{(2)} \cdot \cos(2\omega_4 t) + \mu_6^{(3)} \cdot \sin(2\omega_4 t)]\};$$

$$M_8^{(2)} = \varepsilon^2\{\alpha_8 \cdot \cos(\omega_8 t + \beta_8) + \frac{\mu_8^{(1)}}{\omega_8^2} - \frac{1}{4\omega_4^2 - \omega_8^2}[\mu_8^{(2)} \cdot \cos(2\omega_4 t) + \mu_8^{(3)} \cdot \sin(2\omega_4 t)]\}. \qquad (7)$$

Здесь коэффициенты α_j и β_j легко находятся из начальных условий, но весьма громоздки, а потому не выписываются. Численные коэффициенты $\mu_j^{(i)}$ являются квадратичными функциями коэффициентов Клебша–Гордана и линейными функциями параметра W, характеризующего устойчивость капли по отношению к собственному заряду, и не приводятся ввиду громоздкости. Наибольший интерес для анализа закономерностей нелинейного взаимодействия мод осцилляций капли представляют коэффициенты при периодических компонентах решений, содержащие в знаменателях разности квадратов частот: $(4\omega_4^2 - \omega_m^2)$, то есть имеющие «резонансный» вид. Следует отметить, что коэффициенты α_m также имеют резонансный вид типа $(4\omega_4^2 - \omega_m^2)^{-1}$. В случае, когда может выполниться соотношение $(4\omega_4^2 - \omega_m^2) = 0$, амплитудные коэффициенты при периодических по времени добавках к линейным по амплитуде решениям неограниченно растут, что означает наличие резонансного взаимодействия m-й и четвертой (в приведенном примере) мод. Детальный анализ показывает, что соотношение $(4\omega_4^2 - \omega_m^2) = 0$ может выполниться только при $m > 4$. Это означает, что при резонансном взаимодействии энергия перекачивается из изначально возбужденной моды только в моды с большими номерами. Обратная перекачка энергии за счет резонансного взаимодействия из высоких мод в основную отсутствует, а значит, исчезает гипотетическая возможность нелинейного влияния относительного движения капли и среды на критические условия реализации ее неустойчивости по отношению к собственному заряду.

7. Напомним, что в полное решение для профиля осциллирующей волны линейная часть решения ~ $M_h^{(1)}$ входит с множителем ε, а квадратичная по амплитуде ~ $M_j^{(2)}$ – с множителем ε^2. Решение систем (3) и (4) находим в нулевом приближении по второму малому параметру ρ. Если принять $\varepsilon \approx \rho$, то в используемом приближении ~ ε^2 в линейной части решения можно найти следующее приближение. В этом случае при начальном возбуждении четвертой моды отличными от нуля будут амплитуды мод с m = 2, 3, 4, 5, 6. Частные решения системы (3) для мод с m = 2, 3, 5, 6 будут иметь вид

$$M_2^{(1)} = \frac{\varepsilon \cdot D_2}{\omega_4^2 - \omega_2^2}[\cos(\omega_4 t) - \cos(\omega_2 t)]; \qquad M_3^{(1)} = \frac{\varepsilon \cdot C_3 \cdot \omega_4}{\omega_4^2 - \omega_3^2}[\frac{\omega_4}{\omega_3}\sin(\omega_3 t) - \sin(\omega_4 t)];$$

$$M_5^{(1)} = \frac{\varepsilon \cdot B_5 \cdot \omega_4}{\omega_5^2 - \omega_4^2}[\sin(\omega_4 t) - \frac{\omega_4}{\omega_5}\sin(\omega_5 t)]; \qquad M_6^{(1)} = \frac{\varepsilon \cdot A_6}{\omega_6^2 - \omega_4^2}[\cos(\omega_6 t) - \cos(\omega_4 t)]. \qquad (8)$$

В линейном по ρ приближении поправки к $M_4^{(1)}$ не будет, поскольку у $M_4^{(1)}$ есть первый порядок малости по ε, и $M_4^{(1)}$ по-прежнему будет определяться (6).

Несложно видеть, что, хотя в выражениях (8) и стоят в знаменателях амплитудных множителей разности квадратов частот, к резонансному взаимодействию это не приводит, поскольку ни при каких разумных значениях частот, знаменатели не становятся малыми. Из сравнения решений (7) и

(8) несложно видеть, что в приближении $\varepsilon \approx \rho$ (7) и (8) имеют один порядок малости, квадратичный по ε.

Следует отметить, что использованная при поиске решений малость ρ есть шаг вынужденный, а не обязательный. Система (3), описывающая взаимодействие мод, справедлива при любых ρ, в том числе и при больших $\rho >> 1$ (например, для парогазового пузырька, движущегося в жидкости). Малость ρ использована для того, чтобы отыскать аналитическое асимптотическое решение систем (3) и (4). При большом ρ аналитические асимптотические решения можно искать в пределе малых скоростей $U << 1$, что для пузырька в жидкости вполне приемлемо.

8. Сказанное выше означает, что при $U < 1$ заметный вклад в спектр капиллярных колебаний капли вносит только изначально возбужденная мода ($n=k$). Вклад остальных мод ($n \neq k$), определяющийся линейным межмодовым взаимодействием согласно (8), мал. Отметим, что в использованных безразмерных переменных скорость обезразмеривается на $\sqrt{(\sigma/(R \cdot \rho_1))}$, то есть безразмерной скорости $U = 1$ соответствует размерная скорость $U = \sqrt{(\sigma/(\mathrm{R} \cdot \rho_1))}$. Так, при U=1 для капли воды с радиусом R = 100 мкм, обдуваемой потоком воздуха, размерная скорость потока будет $\approx$ 84 см/с. Число Рейнольдса $\mathrm{Re} = (U \cdot R/\nu)$, для такой капли $\approx$ 5, а течение воздуха в ее окрестности будет ламинарным.

Если скорость внешней среды близка к критической, при которой капля становится неустойчивой $(\omega_2^2 = 0)$, вклад в формирование формы осциллирующей капли остальных мод, возбуждающихся за счет линейного взаимодействия, более заметен, что связано с общим уменьшением всех частот и увеличением амплитудных множителей в (8). При этом моды, более близкие по номеру к изначально возбужденной k-й, имеют большую величину амплитуды колебаний, которая с ростом n убывает, что также связано с увеличением амплитудных множителей в (8).

Численный анализ системы (3) показывает, что при прочих равных условиях и начальном возбуждении более высокой моды, чем основная, снижается критическое значение скорости обдувающего потока для реализации неустойчивости основной моды. Так расчеты показывают, что при начальном возбуждении третьей моды основная мода для ρ = 0,1 становится неустойчивой уже при U = 4,05. Этот эффект, по-видимому, связан с увеличением амплитуды основной моды за счет взаимодействия мод (с известным эффектом [2–4] снижения критических условий реализации неустойчивости с увеличением степени сфероидальности капли). Иначе говоря, наличие межмодового взаимодействия в линейном по амплитуде начальной деформации приближении снижает величины параметров U, W, ρ, при которых капля становится неустойчивой. Впрочем, обсуждаемый эффект достаточно мал и вряд ли существенно повлияет на критические условия зажигания коронного разряда в окрестности свободно падающей капли в грозовом облаке.

9. Заключение. Наличие идеальной несжимаемой диэлектрической среды, обтекающей заряженную идеально проводящую каплю, приводит к появлению взаимодействия мод как в первом, так и во втором порядках малости по амплитуде начальной деформации. Следствием указанного взаимодействия является возбуждение мод, отсутствующих в спектре мод, определяющих начальную деформацию капли, и незначительное снижение критических условий реализации неустойчивости капли по отношению к собственному заряду и тангенциальному скачку поля скоростей на поверхности капли. Перенос энергии при нелинейном резонансном взаимодействии мод осуществляется от изначально возбужденной моды к модам с большими номерами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гонор А.Л., Ривкинд В.Я.* Динамика капли // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. Т.17. М., 1982. С. 98–159.
2. *Григорьев А.И.* Неустойчивости заряженных капель в электрических полях (обзор) // Электронная обработка материалов. 1990. № 6. С. 23–32.
3. *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* Капиллярные неустойчивости заряженной поверхности капель и электродиспергирование жидкостей (обзор) // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
4. *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* Деление заряженных капель во внешнем электрическом поле на части сравнимых размеров (обзор) // Электронная обработка материалов. 2000. № 4. С. 17–27.

5. *Дячук В.А., Мучник В.М.* Коронный разряд обводненной градины как основной механизм инициирования молнии // ДАН СССР. 1979. Т. 248. № 1. С. 60–63.
6. *Grigor'ev A.I., Shiryaeva S.O.* The possible physical mechanism of initiation and growth of lightning // Physica Scripta. 1996. V. 54. P. 660–666.
7. *Мазин И.П., Хргиан А.Х., Имянитов И.М.* Облака и облачная атмосфера: Справочник. Л., 1989.
8. *Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Рыбакова М.В., Ширяева С.О.* О равновесной форме заряженной капли, движущейся относительно среды // Электронная обработка материалов. 2002. № 1. С. 41 – 45.
9. *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Волкова М.В., Филиппова Е.О.* О напряженности электростатического поля в окрестности нелинейно осциллирующей заряженной капли // Там же. 2003. № 6. С. 19–23.
10. *Коромыслов В.А., Григорьев А.И., Рыбакова М.В.* Неустойчивость движущейся заряженной капли во внешнем электростатическом поле // Там же. 2002. № 4. С. 25–34.
11. *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Волкова М.В., Коромыслов В.А.* О резонансном взаимодействии нелинейных осцилляций заряженной капли, находящейся во внешней диэлектрической среде // Там же. 2003. № 5. С. 30–36.
12. *Ширяева С.О., Кузьмичев Ю.Б., Голованов А.С., Белоножко Д.Ф.* Особенности реализации неустойчивости Кельвина-Гельмгольца при конечной толщине внешней среды // Там же. 2000. № 2. С. 25–34.
13. *Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К.* Квантовая теория углового момента. Л., 1975.

Поступила 09.02.04

Summary

In non-linear calculations of the second order of the amplitude of initial deformation of the droplet it is shown that at the presence of flow of ideal incompressible dielectric liquid around an ideally conducting droplet an interaction of modes in the first and second orders of magnitude takes place. Both linear and non-linear interaction of the oscillation modes results in appearance of modes that are absent in the initial spectrum.

А.И. Максимов, А.В. Хлюстова, С.В. Трошенкова

ВЛИЯНИЕ ТЛЕЮЩЕГО РАЗРЯДА НА КИСЛОТНОСТЬ РАСТВОРОВ ЭЛЕКТРОЛИТОВ

Институт химии растворов РАН
ул. Академическая, 1, Иваново, 153045, Россия
Ивановский государственный химико-технологический университет
пр. Ф. Энгельса, Иваново, 7153000, Россия

1. Введение

В ряде работ описываются наблюдения подкисления водных растворов, контактирующих с разрядами атмосферного давления. Таковы работы Бриссе с сотрудниками [1], в которых использовался коронный разряд, а также более поздняя работа Бриссе и Мусса [2], в которой скользящий разряд между двумя электродами горел в непосредственной близости от поверхности раствора. В этих работах газ, активированный действием разряда, контактировал с поверхностью водного раствора, но ток разряда через раствор не проходил. В обеих работах наблюдалось подкисление раствора. При этом в более поздней работе с мощным скользящим разрядом изменения pH раствора, по мнению авторов, полностью соответствовали случаю титрования сильной щелочи сильной кислотой. Обычное объяснение эффекта заключается в учете образования оксидов азота в зоне плазмы с их последующим растворением и естественным подкислением раствора [2]. В то же время в работе [3] на основе исследований влияния на pH раствора тлеющего и коронного разрядов, горящих при разных услови-

---