Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев, А.В. Климов, С.О. Ширяева, С.А Курочкина

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВОЛНОВЫХ ТЕЧЕНИЙ В ТОНКИХ СЛОЯХ ЖИДКОСТИ С ЗАРЯЖЕННОЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ. ЧАСТЬ II. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская,14, г. Ярославль,150000, Россия

1. Введение. Движение жидкости со свободной поверхностью, а в частности волны на поверхности жидкости и капиллярные колебания капель издавна являются предметом исследования теоретической гидродинамики. Большая часть корректных результатов, полученных в этой области, относится к задачам первого порядка малости по амплитуде осцилляций свободной поверхности, решенных в приближении идеальной жидкости. Немногочисленные корректно решенные задачи о нелинейных периодических капиллярно-гравитационных волнах: волнах Стокса, волнах Герстнера (решения найдены в XIX веке), или о нелинейных осцилляциях капель и пузырей (решения найдены в конце XX века), также выполнены в приближении идеальной жидкости [1–12]. Учет вязкости в задачах о расчете движения жидкости со свободной поверхностью до недавнего времени был корректно проведен лишь в линейном приближении по амплитуде [13–17]. Что же касается расчета нелинейных волн на свободной поверхности вязкой жидкости, то до конца XX века они были возможны лишь для тонких слоев жидкости, когда отношение толщины жидкого слоя к длине волны можно было считать малым параметром (приближение «мелкой воды») [18–22]. Однако и в этом случае единого строгого подхода к отысканию решений не было выработано, и при поиске решений приходилось использовать различной степени аргументированности дополнительные физические предположения [18–22]. Задача же расчета нелинейных осцилляций капли вязкой жидкости не решена до сих пор. Расширение области применимости задач рассматриваемого класса дополнительным учетом наличия на свободной поверхности жидкости электрического заряда делает их привлекательными для многочисленных технических, технологических и академических приложений, но отнюдь не упрощает процедуры отыскания решения.

В данной статье основной акцент будет направлен на обоснование возможности строгого учета вязкости в задачах о нелинейных капиллярно-гравитационных волнах и отыскание строгого решения задачи о нелинейных периодических волнах на заряженной свободной поверхности слоя вязкой жидкости конечной глубины без введения дополнительного требования малости толщины слоя по сравнению с длиной волны. Уединенные волны рассматриваться не будут, так как по этому вопросу в последние годы опубликовано множество монографий, в том числе подробный обзор [23].

В нижеследующем анализе существующих методов учета вязкости в задачах о нелинейных колебаниях свободной заряженной поверхности жидкости кроме весьма узкого круга задач, обозначенных в названии работы, будут рассмотрены и задачи из смежных областей, в которых реализуются идеи и алгоритмы, помогающие задать направление разработки строгих методов решения задачи о расчете нелинейных капиллярно-гравитационных волн в слоях вязкой жидкости конечной толщины, допускающие непрерывный предельный переход к тонким слоям.

2. О возможности учета вязкости в задачах о нелинейных периодических волнах и осцилляциях конечных объемов жидкости. Методы решения задач о расчете нелинейных периодических волн в жидкости произвольной глубины и нелинейных осцилляций капель вязкой жидкости (аналитические и численные) до конца не разработаны, а известные решения конкретных задач выполнены различных приближениях. Исключением является гидродинамика тонких пленок, в которой изучаются разложения основных уравнений гидродинамики вязкой жидкости по малой безразмерной толщине пленки [18 – 22]. Однако в большей части работ по этому вопросу исследования нелинейных волн сводятся к выводу нелинейных уравнений, имеющих солитонные решения: нелинейного уравнения Шредингера в общем случае слабо нелинейных волн [24], уравнения Бюргерса для волн на поверхности раздела в двухслойных потоках Куэтта и Пуазеля [25]; обобщения уравнений Бюргерса и Кортвега-де-Фриза для волн при наличии поверхностного заряда [26] или образующихся при стекании пленки по наклонной плоскости [27]. Список подобных примеров весьма широк. Нелинейные аналитические исследования по теории тонких пленок заключаются в анализе уравнений, общее решение которых, как правило, неизвестно. В качестве результатов таких исследований рассматривается предсказание режимов движения жидкости (главным образом, установившихся), найденных при качественном исследовании уравнений. Вопросы о зависимости характера движения от начальных условий или эволюции формы нестационарного профиля волны остаются в стороне. Таким образом, несмотря на кажущуюся глубокую разработанность, существующие нелинейные модели гидродинамических движений в тонких пленках вязких жидкостей не приспособлены для определения непосредственно формы и направления изменения свободной поверхности во времени по заданным начальным условиям. Кроме того, приближение тонкой пленки невозможно в силу особенностей математической процедуры их получения обобщить на случай слоя жидкости конечной (не малой) толщины, который важнее с точки зрения практики и возможности экспериментальной проверки.

В жидкости с плотностью ρ и кинематической вязкостью ν, подверженной действию внешнего потенциального силового поля $\vec{F}(\vec{r},t)$, поле скоростей течения жидкости $\vec{U}(\vec{r},t)$ и давление в ней $p(\vec{r},t)$ связаны уравнением Навье–Стокса:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}+\left(\vec{U}\cdot\nabla\right)\vec{U}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\Delta\vec{U}+\vec{F}\,, \tag{1}$$

При $\nu = 0$ уравнение (1) превращается в уравнение Эйлера, изучаемое в теории движения идеальной жидкости. Отношение конвективного члена $\left(\vec{U}\cdot\nabla\right)\vec{U}$ к вязкому $\nu\,\Delta\vec{U}$ дает число Рейнольдса Re. Если в (1) опустить конвективный член, то получится приближение бесконечно малых значений Re. Этим приближением традиционно пользуются, например, при решении задач об определении формы поверхности двух сталкивающихся капелек (см. [28] и цитируемую там литературу). Кроме того, приближение Re→0 выделяет область применимости теории диссипативных волн и колебаний бесконечно малой амплитуды, разработанной еще в начале двадцатого века [1–6].

Решение нелинейных гидродинамических задач со свободной поверхностью, когда число Рейнольдса и вязкость отличны от нуля, связано со значительными трудностями. Встречаются ситуации, при которых исследователи отрицают саму возможность сравнения своих результатов с расчетами по другой методике. Например, авторы [28] утверждают, что их принцип численного расчета формы сталкивающихся в вязкой среде пузырьков и капель при бесконечно малых числах Рейнольдса невозможно сравнивать с аналогичными расчетами при конечных числах Рейнольдса "ввиду различия физики" этих приближений. Имеются работы и с очевидными ошибками, как, например, статья [29], где для функции тока, появляющейся в результате скаляризации задачи о распространении волны конечной амплитуды на поверхности бесконечно глубокой жидкости, ошибочно записывается то же уравнение, что и в теории волн бесконечно малой амплитуды.

Наиболее правдоподобные расчеты нелинейной эволюции формы свободной поверхности вязкой жидкости при ненулевом значении числа Рейнольдса выполнены в приближении малой вязкости на основании упрощения задачи с помощью теории пограничного слоя [3, 30, 31]. Суть этого подхода будет отражена достаточно точно, если назвать его "методом модификации граничных условий". Идея подхода состоит в том, чтобы выполнить предельный переход в уравнениях пограничного слоя [30], устремляя к нулю толщину пограничного слоя (это равносильно приближению $\nu \to 0$). Полученные предельные выражения определяются на поверхности, в которую стягивается расчетная область для уравнений пограничного слоя. В результате получаются уравнения для вязких добавок к потенциальной скорости и давлению на поверхности. Вне пограничного слоя движение считается потенциальным. Поэтому оставшийся после предельного перехода объем жидкости становится областью гармоничности потенциала скорости, как и в случае невязкой жидкости. Получается, что изменения в постановке задачи, связанные с появлением малой вязкости, затрагивают только граничные условия: появляются уравнения для поправок к полю скоростей и давлению на свободной поверхности. Эти поправки прибавляются к величинам, ответственным за потенциальное течение. Кинематическое условие и условие для давления на свободной поверхности записываются относительно подправленных величин. Уравнения пограничного слоя, как известно

[30], – главная часть асимптотического разложения уравнений Навье–Стокса и неразрывности по целым степеням малого параметра $\mathrm{Re}^{-1/2}$ (членами порядка $\mathrm{Re}^{-1/2}$ пренебрегают), когда линейный масштаб в направлении по нормали к ограничивающей жидкость поверхности растянут в $\mathrm{Re}^{1/2}$ раз. Параметр $\mathrm{Re}^{1/2}$ характеризует отношение характерного масштаба длины (например, длины волны или размера капли) к толщине пограничного слоя. Таким образом, метод модификации граничных условий является инструментом решения гидродинамических задач в приближении $\mathrm{Re} \to \infty$.

Оценим степень пригодности приближения пограничного слоя для изучения распространения волны по поверхности бесконечно глубокой жидкости и капиллярных колебаний уединенной капли. Для оценки числа Рейнольдса можно воспользоваться формулой [13]

$$\mathrm{Re} = \left(a \cdot L \cdot \omega\right) / \nu\,; \tag{2}$$

где a – амплитуда колебательного движения, L – характерный линейный масштаб, ω – частота колебательного движения, ν – кинематическая вязкость. В случае волны за L принимается длина волны, а за a – ее амплитуда. В случае колебаний капли L можно положить равной радиусу капли, а амплитуду отклонения колеблющейся капли от сферической формы взять в качестве a. Известно, что частота движения и в случае капли, и в случае волны по порядку величины оценивается по формулам линейной теории [13]:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{8\pi^3\gamma}{\rho\lambda^3} + \frac{2\pi g}{\lambda}};\;\; \omega_2 = \sqrt{\frac{8\gamma}{\rho R^3}}.$$

Здесь ω_1 – частота волны с длиной λ (g – ускорение свободного падения); ω_2 – частота основной моды капиллярных колебаний капли радиуса R. В обеих формулах γ – коэффициент поверхностного натяжения жидкости, а ρ – ее плотность. Для воды $\rho = 1$ г·см$^{-3}$; $\gamma = 72$ дин /см; $\nu = 0{,}01$ см^2·с$^{-1}$.

Несложно подсчитать, что при уменьшении радиуса R капли воды от 1 мм до 10 мкм при амплитуде ее колебаний $0{,}3R$ число Рейнольдса уменьшается от 228 до 22,8. Поэтому для исследования нелинейных колебаний капель размером в сотни микрометров и меньше (диапазон размеров, представляющий наибольший интерес для физики жидкокапельных систем естественного происхождения: облаков, осадков, туманов) точность приближения пограничного слоя невысока.

Для волны на поверхности бесконечно глубокой жидкости с длиной, равной капиллярной постоянной $b = \sqrt{\gamma/\rho g}$, можно найти, что число Рейнольдса при $a = 0{,}3$ имеет порядок 10^3, и приближение пограничного слоя должно давать хорошие результаты. Для меньших же длин волн, представляющих значительный интерес в практических приложениях, связанных с волнообразованием на поверхности твердых тел (металлов и полупроводников) при их расплавлении мощным лазерным импульсом [33] или пучком ионов [34], когда образуются волны с длинами ~ 0,1 – 1 мкм, приближение пограничного слоя опять становится весьма грубым.

Значительный интерес вызывают гидродинамические задачи со свободной поверхностью, претерпевающей различные типы неустойчивостей. Для примера рассмотрим применимость приближения пограничного слоя к моделированию неустойчивости свободной поверхности по отношению к распределенному на ней электрическому заряду. В случае неограниченно глубокой идеальной несжимаемой жидкости, граничащей с вакуумом, это явление называется неустойчивостью Тонкса–Френкеля, в случае капли идеальной несжимаемой жидкости в вакууме говорят о неустойчивости Релея. В обоих случаях существует критическое значение поверхностной плотности заряда, выше которой электрические силы превосходят лапласовские, и поверхность начинает сбрасывать заряд в виде маленьких сильно заряженных капелек [14]. Сброс заряда происходит с вершин эмиссионных выступов, образующихся на заряженной поверхности. Математическая модель формирования таких выступов до недавнего времени имела лишь качественные варианты. Последние достижения в этом направлении связаны с построением равновесных форм, образующихся на поверхности невязкой заряженной проводящей жидкости методами теории функции комплексного переменного [34], а также с прямым численным моделированием самого процесса образования эмиссионного выступа на поверхности невязкой проводящей жидкости [35]. Для диэлектрической жидкости имеются расчеты формы равновесной длинноволновой структуры, образующейся под воздействием сильного внешнего электрического поля [36].

Рассмотрим ситуацию, когда плоский слой жидкости несет поверхностный заряд с плотностью, немного большей критической. Известно, что в этом случае движение становится апериодическим [14], и вместо характерного масштаба времен ω^{-1} "включается" характерный временной масштаб апериодического движения. В случае малой вязкости согласно [1] в качестве такого масштаба можно взять $\tau = 1/\nu k^2$, где $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число. Подставляя νk^2 вместо ω в (2), можно оценить число Рейнольдса по порядку величины: $\mathrm{Re} \sim a/\lambda < 1$. Аналогичную оценку можно провести для движения поверхности заряженной капли с зарядом, близким к критическому.

Приведенный пример показывает полную непригодность приближения пограничного слоя для моделирования режимов движения заряженной поверхности жидкости, когда поверхностная плотность заряда близка к критической, выше которой начинает развиваться электрогидродинамическая неустойчивость.

Метод модификации граничных условий используется как для численных, так и для аналитических расчетов. В англоязычных изданиях существует следующая терминология. Определение гидродинамического потенциала посредством численного интегрирования поля вихрей, образующих на поверхности невязкой жидкости вихревой слой, обозначают терминами Boundary Integral Method (Algorithm, Technique) или Generalised Vortex Method (см., например, [28, 37–41]). Этими же терминами пользуются, имея в виду численный вариант метода, названного здесь модификацией граничных условий, когда потенциальная часть поля скоростей определяется методом интегрирования поверхностного вихревого слоя. В настоящей работе вместо перечисленных выше названий используется термин "метод модификации граничных условий", чтобы подчеркнуть, что это не конкретный способ численного или аналитического анализа, а идея, которую можно реализовать по-разному.

Работам по обсуждаемой теме, выполненным в приближении пограничного слоя, не достает в одних случаях строгости рассуждений (см., например, [42–45]), в других – физической правдоподобности результатов [37].

Метод модификации граничных условий применялся совместно с принципами асимптотических разложений для аналитического исследования распространения нелинейных волн по поверхности бесконечно глубокой слабовязкой жидкости [42], покрытой упругой пленкой, а также для изучения закономерностей нелинейных колебаний капель и пузырьков в приближении малой вязкости [43–45]. В перечисленных работах модификация граничного условия для давления сводится к искусственному дописыванию вязких слагаемых без корректного обоснования. Кинематическое граничное условие не модифицируется вообще, и для доказательства корректности отбрасывания в кинематическом граничном условии "непотенциальных" поправок к скорости никаких оценок не проводится. В результате ни одну из моделей, развитых в [43–45], нельзя считать корректным следствием уравнений гидродинамики ньютоновской жидкости.

Метод модификации граничных условий применялся для численного моделирования колебаний слабовязкой капли [37] и численного решения задачи об определении профиля стационарной периодической волны, распространяющейся по поверхности бесконечно глубокой маловязкой жидкости под влиянием ветровой нагрузки [46–47]. Хотя эти работы связаны с численными исследованиями, интересно проанализировать полученные в них результаты, чтобы яснее представить степень приемлемости идеи модификации граничных условий для построения моделей реальных физических явлений. В [37, 46–47], в отличие от [43–45] уделено внимание правдоподобному обоснованию метода, но есть моменты, благодаря которым ни на одну из работ [37, 46, 47] нельзя смотреть как на дающую инструмент, удобный для исследования таких задач как, например, изучение нелинейных стадий развития электрогидродинамических неустойчивостей.

Так, некоторые результаты [37] с физической точки зрения выглядят как курьез. В частности, колебания капли авторам удается рассчитывать, если начальная деформация капли не превышает ~0,3 ее радиуса. При больших деформациях интегрирование по времени предсказывает деформацию капли в фигуру, обволакивающую каплеобразный выступ. Границы этих образований в определенный момент времени начинают касаться, и само понятие поверхности капли теряет смысл. В то же время без вязкости численный алгоритм не дает ничего подобного даже при начальных деформациях порядка размера капли. Расчеты в [37] проведены при Re = 2000, когда теория пограничного слоя должна работать, казалось бы, хорошо.

В [46, 47] в обосновании метода слабым местом является соглашение о независимости затухания различных мод, что не очевидно и может быть принято лишь для маловязкой жидкости в приближении отсутствия взаимодействия волн. Тем не менее, авторы показали хорошее согласие теории с экспериментом для волн на поверхности воды с длиной ~ 5 см. Вычисления в [46, 47] проведены при Re~1000. Нужно отметить, что учет в [46, 47] влияния ветровой нагрузки на распространение волны не усложнение, как кажется на первый взгляд, а в определенной степени упрощение задачи, потому что для определения стационарного профиля бегущей волны в системе отсчета, двигающейся вместе с ней, нужно решать уравнения установившегося движения. Поэтому вычислительная схема, предложенная в [46, 47], не годится для описания эволюции волны при отсутствии ветровой нагрузки или при реализации какого-либо типа гидродинамической неустойчивости.

Недоработанность и неуниверсальность метода модификации граничных условий заставляет искать другие пути решения задачи. Освещенные в научной литературе достижения в этом направлении связаны с применением прямых численных методов. Судя по публикациям конца 90-х годов прямое решение уравнений Навье–Стокса пока освоено для чисел Рейнольдса значительно меньших тех, при которых происходят реальные волновые движения свободной поверхности (см. [48] и указанную там литературу). Ясно, что правильность работы численного алгоритма в этом случае сложно проверить экспериментально. Некоторые численные методы, например, обобщение метода интегрирования поля вихрей (Generalised Vortex Method) на случай конечных чисел Рейнольдса, находятся на стадии разработки [49].

Модификация граничных условий – один из многочисленных вариантов работы с теорией пограничного слоя. Приведенный критический материал направлен именно на метод модификации граничных условий. Важность самой теории пограничного слоя не вызывает сомнений. Это можно проиллюстрировать следующим примером.

Известно, что виртуальные колебания границы раздела двух идеальных жидкостей неустойчивы, если на поверхности раздела имеется тангенциальный скачок скорости. Эта неустойчивость становится пороговой, если имеются стабилизирующие факторы, такие как поверхностное натяжение и поле тяжести. Неустойчивость тангенциального разрыва поля скоростей для идеальных жидкостей, заполняющих верхнее и нижнее полупространства и находящихся в поле тяжести – классический пример неустойчивости Кельвина–Гельмгольца (нижняя жидкость гораздо тяжелее верхней, которая движется с постоянной скоростью). Для границы раздела вода–воздух реализация неустойчивости происходит, если скорость ветра превышает значение примерно 650 см/сек. Модель неустойчивости Кельвина–Гельмгольца невозможно распространить на случай вязких жидкостей без использования методов теории пограничного слоя. Реальная физическая задача, учитывающая вязкость, подразумевает, что верхняя жидкость имеет конечную скорость на бесконечности и малую порядка скорости виртуальных движений, на границе раздела. Профиль скоростей с такими свойствами не может быть точным решением уравнений гидродинамики вязкой жидкости. Поэтому течение верхней жидкости является турбулентным, и профиль его скорости невозможно построить без привлечения дополнительных гипотез о движении жидкости, в частности, без гипотезы о существовании пограничного слоя. Если использовать известный логарифмический профиль скоростей для турбулентного течения в верхней жидкости, то обнаруживается неустойчивость, называемая неустойчивостью Майлса [50, 51]. Теория Майлса предсказывает возможность генерации волн, если скорость ветра превышает минимальное значение фазовой скорости гравитационно-капиллярной волны (23 см/с для воды).

Интересно отметить, что теории этих неустойчивостей разрабатываются параллельно. Встречаются случаи, когда при одной и той же скорости ветра они рассматриваются как два различных механизма пенообразования на поверхности океана [52]. Отдельной от неустойчивостей Кельвина–Гельмгольца и Майлса является неустойчивость капиллярных колебаний вязкоупругой среды при падении на ее свободную поверхность потока импульса, передаваемого неким материальным пучком [33, 53]. В отличие от двух предыдущих она, кроме колебательного, имеет и апериодический режим реализации. Все три неустойчивости, казалось бы, связаны с одним и тем же явлением – движением одной среды относительно другой, однако способ учета вязкости слишком сильно влияет на характер явления. Приведенный пример показывает, что гидродинамическое движение существенно усложняется при учете влияния вязкости.

Известно, что с нелинейными решениями невязких задач связано открытие большого количества новых гидродинамических эффектов (см., например, [41, 54–58]). Вязкость – фактор, усложняющий физическое явление. Поэтому очевидно, что корректное аналитическое исследование нелинейных задач гидродинамики вязкой жидкости со свободной поверхностью обещает получение еще более интересных результатов. С другой стороны, как показывает проведенный краткий обзор, в XX веке аналитические методы так и не превратились в корректный инструмент исследования эволюции свободной поверхности вязкой жидкости. Тем не менее, вполне реальна корректная аналитическая формулировка задачи распространения волны на поверхности бесконечно глубокой вязкой жидкости в приближении, квадратичном по амплитуде волны, которая и предлагается в нижеследующем изложении. Кроме обозначенной цели корректной аналитической формулировки задачи об исследовании временной эволюции нелинейных волн на поверхности вязкой жидкости в нижеприведенных рассуждениях преследовалась также цель построения схемы аналитических вычислений, пригодной для исследования нелинейной стадии апериодических неустойчивостей свободной поверхности жидкости.

3. О корректном учете вязкости жидкости в задачах о нелинейных капиллярно-гравитационных волнах в бесконечно глубокой жидкости. А *priori* очевидно, что искомый метод решения задачи расчета нелинейных капиллярно-гравитационных волн в слое вязкой жидкости конечной толщины должен быть развит в рамках существующих аналитических методов теории возмущений, поскольку только такой подход к нелинейным задачам обладает достаточной универсальностью.

Существующие методы разложения по малому параметру наиболее детально разработаны для решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Для нижеследующего важно то обстоятельство, что в классических монографиях по теории возмущений [59–61] методы решения формулируются для уравнений, в которых и нелинейность и диссипация считаются малыми величинами, например для уравнений вида

$$\ddot{u}+\omega^2 u=\varepsilon \quad f(u,\dot{u}). \tag{3}$$

Даже если вязкая диссипация входит в уравнение линейно:

$$m\ddot{u}-2\mu\dot{u}+\omega^2 u=\varepsilon g(u), \tag{4}$$

то формулируется условие малости диссипации, проводится обезразмеривание задачи и замена переменных, преобразующие ее в (3). Интересно, что простая идея решить (4) в предположении конечности диссипации, характеризуемой параметром μ, проводя разложения по малому параметру, отвечающему только за нелинейность, в классических монографиях по методам возмущений [59–61] не реализована. Конечно, анализ (4) в этом случае более громоздок, чем для задачи типа (3), но не настолько, чтобы не довести его до конца. Диссипативный член входит в уравнение линейно, и линейные уравнения, из которых он не исключен, легко решаются. На самом деле, указанный пробел в литературе по методам возмущений не существенен для анализа дифференциальных уравнений ввиду того, что в практически важных случаях вязкие члены в них, такие как $-\ 2\mu\dot{u}$ в (4), сносятся в малые величины без ущерба для структуры решения, в частности это не меняет порядок исходного уравнения.

В стандартной методике обучения методам возмущений сначала осваиваются методы возмущений применительно к дифференциальным уравнениям и лишь потом осуществляется переход к нелинейным краевым задачам. Поэтому манера сводить задачу к виду, в котором и диссипация, и нелинейность малы, часто без должного продумывания механически переносится на более сложные математические модели. Видимо, именно по этой причине во всех цитированных работах по нелинейным движениям свободной поверхности вязкой жидкости решения проводятся в предположении, что и вязкость, и нелинейность являются малыми величинами. Однако в уравнениях гидродинамики «снесение» диссипативного члена $\sim\nu\Delta u$ в малые связано с уменьшением порядка уравнения по пространственным переменным, а значит, с потерей существенных черт решения, для восстановления которых требуется применение специальных приемов, например метода пограничного слоя. Методы последнего вблизи свободной поверхности в настоящее время находятся на стадии разработки и существенно отличаются от хорошо известных методов пограничного слоя вблизи твердой поверхности. С другой стороны, диссипативный член $\sim\nu\Delta u$ входит в уравнения гидродинамики линейно, а для решения линеаризованных уравнений гидродинамики разработаны эффективные методы. Поэтому если «снести» в малые только недиссипативную нелинейность, то задача оказывается громоздкой, но решаемой и в то же время не теряется порядок уравнения по пространственным переменным, а значит, сохраняются основные свойства решения и отпадает необходимость обращения к специальным приемам.

Таким образом, между задачами решения нелинейных дифференциальных уравнений с диссипацией и нелинейной задачей решения уравнений движения вязкой жидкости со свободной поверхностью имеется аналогия. Для обеих задач разработка асимптотических методов решения ведется в предположении малости диссипации и нелинейности. В то же время в обоих случаях существует альтернативный подход, связанный с увеличением громоздкости вычислений, при котором линейные слагаемые, отвечающие за диссипацию, считаются конечными. Для дифференциальных уравнений этот подход не дает заметных преимуществ, поскольку «снесение» диссипативного члена в малые существенно не изменяет свойства решения. Но в случае решения уравнений движения вязкой жидкости со свободной поверхностью предлагаемый подход позволяет уйти от использования еще плохо разработанных асимптотических методов пограничного слоя вблизи свободной поверхности и в то же время сохранить наиболее важные свойства решения.

В начале нашего века описанная идея решения задач определения движения свободной поверхности вязкой жидкости реализована в серии работ авторов настоящей статьи [62–70], посвященных построению нелинейных профилей периодических бегущих капиллярно-гравитационных волн на поверхности вязкой глубокой жидкости. Ошибочное решение аналогичной задачи опубликовано еще в начале прошлого века [71]. Ввиду громоздкости теоретическое исследование этой задачи получило новый толчок только после массовой компьютеризации и появления современных мощных вычислительных средств [48] и пошло по пути совершенствования алгоритмов численного счета. Наиболее заметный после публикации [71] прогресс в построении корректного аналитического теоретического исследования периодических капиллярно-гравитационных волн связан с работами [62–70]. В них впервые приводятся корректные выражения для профиля периодической бегущей капиллярно-гравитационной волны во втором приближении по амплитуде отклонения поверхности жидкости от равновесной плоской формы. В них исправлена вычислительная ошибка, допущенная в [71], остававшаяся незамеченной в течение целого века. Работы [62–65] посвящены методике построения решения, главная идея которой – считать диссипативный член в уравнениях гидродинамики конечным, а в качестве единственного малого параметра, по которому ведется разложение, использовать отклонение поверхности от равновесной формы. Несмотря на кажущуюся простоту, сформулированная идея до появления работ [62–70] не использовалась в качестве инструмента аналитического исследования. Это связано с тем, что на этапе решения задачи второго порядка малости уравнения и граничные условия при таком подходе представляют соотношения линеаризованной гидродинамики с неоднородностью, описываемой громоздкими выражениями. Общих методов решения таких задач не существует, но в [62–70] показано, что найти частное решение подобных неоднородных задач можно довольно простыми методами: например методом неопределенных коэффициентов. Кроме того, в [62–70] выписывается решение задачи, которое наиболее интересно с точки зрения исследования влияния нелинейности на профиль волны. От решения выписанного в [62–70] несложно перейти к общему решению задачи, но оно будет содержать слагаемые, которые для нелинейного анализа неинтересны. Рассматривать не общий вид решения, а только его составляющую, ответственную за нелинейное взаимодействие, – еще один прием, который использован в [62–70]. Главной трудностью подхода здесь является громоздкость, но она преодолима.

Наиболее важный результат работ [62–65] – описание методики счета. Громоздкость полученных в [62–65] выражений делает их трудоемкими для качественного анализа. Тем не менее, приведенные в [62–65] примеры расчета профилей волн показывают, что использование новой модели особенно актуально для расчета профилей нелинейных периодических бегущих капиллярно-гравитационных волн со значением волнового числа, которое в моделях без диссипации называется резонансным [72]. Для волнового числа, обезразмеренного на капиллярную постоянную жидкости, резонансное значение равно $1/\sqrt{2}$. Для капиллярно-гравитационных волн на воде это соответствует волне длиной ~ 2,4 см. Для величин волновых чисел из окрестности резонансного значения асимптотические выражения для амплитуды нелинейной волны, построенные с помощью модели идеальной жидкости, обращаются в бесконечность при любых конечных значениях амплитуды волны первого приближения. Примеры расчетов [62–65] показывают, что при околорезонансных значениях волнового числа даже малая вязкость играет настолько важную роль в формировании профиля нелинейной волны, что любую модель без учета диссипации следует считать совершенно неправильной. При резонансном значении волнового числа выражения для амплитуды нелинейной волны, предложенные в [62–65], при любых значениях амплитуды волны первого приближения дают конечную амплитуду нелинейной волны и адекватно описывают профиль нелинейной волны конечной амплитуды, по крайней мере, когда эта амплитуда достаточно мала. Нелинейные добавки к профилю волны, рассчитанные по формулам [62–65], существенно меньше поправок, рассчитанных в предположении идеальности жидкости.

В [68, 69] методика счета, разработанная в [62–65], использована для построения профиля нелинейной периодической капиллярно-гравитационной бегущей волны на поверхности вязкой жидкости, по которой распределен электрический заряд (жидкость считается идеально проводящей). В [68] впервые теоретически показано, что благодаря наличию поверхностного электрического заряда капиллярные волны могут иметь заострения на вершинах. До этого считалось, что притупленность вершины – характерное свойство капиллярных волн [48, 72]. Волны с заостренной вершиной, предсказанные в [68, 69], являются новым теоретически обнаруженным типом волн и названы в [68, 69] электрокапиллярными.

В [70] материал работ [62–69] подан в новом виде. Для громоздких математических выражений, полученных в [62–69], выписаны асимптотические формулы в приближении малой вязкости. Этот шаг нисколько не противоречит начальной идее серии данных работ считать вязкость конечной. На этапе решения это принципиально, так как позволяет в процессе решения не потерять существенные для исследования свойства решения задачи. Переход к малой вязкости в финальных выражениях – корректная операция, представляющая собой переход от громоздкой аналитической формулы к формуле, которая ее асимптотически аппроксимирует. Снесения же диссипативного слагаемого в малые величины на этапе записи уравнений гидродинамики, связанного с изменением типа уравнения в частных производных, при этом удается избежать. Выражение для профиля волны в пределе малой вязкости [70] удобно для анализа и практического использования. В частности, его анализ позволил на плоскости волновое число – поверхностная плотность заряда выделить области значений физических параметров, в которых капиллярно-гравитационные волны имеют заостренные вершины, и дать аналитический критерий условий реализации неустойчивости электрокапиллярных волн, обнаруженных в [70].

Расчетные приемы, разработанные в [62–70], составляют основу современных аналитических средств асимптотического исследования нелинейных периодических капиллярно-гравитационных волн на поверхности жидкости. Они могут быть успешно использованы для исследования волн на поверхности слоя жидкости конечной толщины, исследования движений в вязкой жидкости, стекающей по наклонной плоскости, и различных вариантов этих задач, усложненных наличием поверхностного электрического заряда, поверхностно-активного вещества и т.п.

4. Решение задачи о нелинейных капиллярно-гравитационных волнах в жидкости конечной глубины. Пусть несжимаемая жидкость с плотностью ρ, кинематической вязкостью ν, коэффициентом поверхностного натяжения γ заполняет в поле тяжести $\vec{g} \parallel -\vec{n}_z$ бесконечный протяженный в горизонтальных направлениях слой $-d \le z \le 0$ в декартовой системе координат ($\vec{n}_z$-орт оси z). Идеально электропроводная жидкость находится в однородном электрическом поле с напряженностью E_0, вектор которого направлен вниз ($\vec{E}_0 \parallel \vec{g}$). По поверхности жидкости в положительном направлении оси Ox распространяется волна малой амплитуды a, волновое число которой k. Физические параметры жидкости и окружающей ее среды (ρ, ν, γ, g, d, E_0, a, k) считаются постоянными величинами, не зависящими от координат, времени, температуры и давления. Все физические переменные не зависят от y.

Математическая модель феномена имеет вид

$$-d \le z \le \xi:\ \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \left(\nabla \times \vec{U}\right) \times \vec{U} = -\nabla\left(\frac{1}{\rho} p + \frac{1}{2} U^2 + gz\right) + \nu \Delta \vec{U};\ \ \nabla \cdot \vec{U} = 0;\ \ z \ge \xi:$$

$$\Delta\Phi = 0; \qquad z = \xi:\ \ \frac{\partial \xi}{\partial t} + u\,\frac{\partial \xi}{\partial x} = w; \qquad \vec{\tau} \cdot (\vec{n} \cdot \nabla)\, \vec{U} + \vec{n} \cdot (\vec{\tau} \cdot \nabla)\, \vec{U} = 0;$$

$$\Phi = 0; \qquad p - 2\rho\nu \vec{n} \cdot (\vec{n} \cdot \nabla)\vec{U} + \frac{\left(\nabla\Phi\right)^2}{8\pi} = -\gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\left(1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2\right)^{-3/2};$$

$z = -d:\ u = 0;\ w = 0;\quad z \to \infty:\ \nabla\Phi = -E_0 \cdot \vec{n}_z$; $\xi = \xi(x, t)$ – отклонение свободной поверхности жидкости от равновесной в поле сил тяжести и капиллярных сил плоской формы $z = 0$, вызванное капиллярным волновым движением; $\vec{U} = (u, 0, w)$ – поле скоростей течения жидкости; p – гидродинамическое давление внутри жидкости; Φ – потенциал электрического поля, а $\vec{n}$ и $\vec{\tau}$ представляют собой нормальный и касательный к свободной поверхности векторы. В качестве конечной цели исследования поставим отыскание зависимости величины возмущения свободной поверхности ξ от координаты x и времени t в квадратичном по амплитуде волны приближении.

Условия в начальный момент времени, при $t = 0$, подбираются таким образом, чтобы получаемое в результате решение имело более простой вид. В качестве такого условия можно использовать требование, чтобы в начальный момент времени возмущение свободной поверхности в первом приближении по малой амплитуде волны a имело вид бегущей синусоидальной волны при нулевой начальной скорости, то есть

$$t=0: \qquad \xi(x,t)=2a\cdot Exp(St-ikx)+O\left(a^2\right); \qquad (\partial\xi/\partial t)=0;$$

где S – комплексная частота волны.

В нулевом приближении свободная поверхность жидкости является невозмущенной, то есть

$$\xi_0(x,t)=0.$$

Тогда величины поля скоростей, давления и электрического потенциала определятся из граничных условий следующим образом:

$$u_0(x,z,t)=w_0(x,z,t)=0; \qquad p_0(x,z,t)=-\frac{E_0^{\,2}}{8\pi}-\rho gz; \qquad \Phi_0(x,z,t)=-E_0\,z.$$

В первом и втором порядках малости по амплитуде волны решение задачи будем искать в виде разложения неизвестных компонент профиля свободной поверхности жидкости ξ, поля скоростей (u, 0, w), давления p и электрического потенциала Φ по степеням малого параметра ε, в качестве которого возьмем отношение амплитуды a к капиллярной постоянной жидкости: $\varepsilon = (a/\alpha)$, где $\alpha\equiv\sqrt{\gamma/g\rho}$:

$$\xi(x,t)=\varepsilon\xi_1(x,t)+\varepsilon^2\xi_2(x,t)+O(\varepsilon^3);$$

$$u(x,z,t)=\varepsilon u_1(x,z,t)+\varepsilon^2 u_2(x,z,t)+O(\varepsilon^3);$$

$$v(x,z,t)=\varepsilon v_1(x,z,t)+\varepsilon^2 v_2(x,z,t)+O(\varepsilon^3);$$

$$p(x,z,t)=p_0(x,z,t)+\varepsilon p_1(x,z,t)+\varepsilon^2 p_2(x,z,t)+O(\varepsilon^3);$$

$$\Phi(x,z,t)=\Phi_0(x,z,t)+\varepsilon\Phi_1(x,z,t)+\varepsilon^2\Phi_2(x,z,t)+O(\varepsilon^3).$$

Подставим эти выражения в математическую формулировку и выделим слагаемые первого и второго порядков по ε. В итоге получим краевые задачи для нахождения решений первого и второго порядков малости. Не выписывая их математические формулировки, которые легко получаются после описанной процедуры, приведем готовое решение для профиля капиллярно-гравитационной волны с учетом слагаемых второго порядка малости (строгое решение задачи первого порядка малости можно найти в [15]):

$$\xi(x,t)=a\cdot Exp(\operatorname{Re}S\cdot t)\cdot Cos(\operatorname{Im}S\cdot t-k\cdot x)+$$
$$+2a^2\cdot|Z_1|\cdot Exp(2\operatorname{Re}S\cdot t)\cdot Cos(2\operatorname{Im}S\cdot t-2\,k\cdot x+Arg\,Z_1)$$

$$Z_1=\frac{1}{\Delta_{Z_1}}\Big(2\pi k\nu\rho w_1(8k(S+4k^2\nu)R_{11}+i(S+8k^2\nu)R_{13})+8\pi k^2\nu\rho w_1 SR_{22}\cdot Ch2dk+$$
$$+8\pi ik^2\nu\rho w_1 SR_{21}\cdot Sh2dk-2\pi\rho w_1 S(S+4k^2\nu)R_{22}\cdot Chdw_1-4\pi ik\rho S(S+4k^2\nu)R_{21}\cdot Shdw_1-$$
$$-2\pi\rho w_1((S^2+8k^2\nu S+32k^4\nu^2)R_{11}+ik\nu(S+8k^2\nu)R_{13})\cdot Ch2dk\cdot Chdw_1+$$
$$+4\pi k\rho((S^2+16k^2\nu S+32k^4\nu^2)R_{11}+ik\nu(3S+8k^2\nu)R_{13})\cdot Sh2dk\cdot Shdw_1-$$
$$-2\pi k^2 SR_{12}\cdot Ch2dk\cdot Shdw_1+\pi kw_1 SR_{12}\cdot Sh2dk\cdot Chdw_1\Big);$$

где

$$\Delta_{Z_1}=32\pi k^2\nu\rho w_1 S(S+4k^2\nu)-4\pi\rho w_1 S(S^2+8k^2S+32k^4\nu^2)\cdot Ch2dk\cdot Chdw_1+$$
$$+8\pi k\rho S(S^2+16k^2\nu S+32k^4\nu^2)\cdot Sh2dk\cdot Shdw_1+2k^2(8\pi k^2\gamma+2\pi g\rho-E_0^{\,2}k)S\cdot Ch2dk\cdot Shdw_1-$$
$$-kw_1(8\pi k^2\gamma+2\pi g\rho-E_0^{\,2}k)S\cdot Sh2dk\cdot Chdw_1; \qquad w_1=\sqrt{4k^2+\frac{2S}{\nu}}; \qquad q=\sqrt{k^2+\frac{S}{n}};$$

$$R_{11}=\frac{ik^2}{2}\cdot\sigma_1\cdot Shdk-\frac{ikq}{2}\cdot\sigma_1\cdot Shdq+\frac{ikq}{2}\cdot\sigma_2\cdot Chdk-\frac{ikq}{2}\cdot\sigma_2\cdot Chdq-$$

$$-\frac{kS^2\cdot\sigma_1\cdot\sigma_2\cdot Chd(k+q)}{4\nu\left(S(S-4k^2\nu)-8k^3\nu^2(k-q)\right)}+\frac{kS^2\cdot\sigma_1\cdot\sigma_2\cdot Chd(k-q)}{4\nu\left(S(S-4k^2\nu)-8k^3\nu^2(k+q)\right)}+$$

$$+\frac{k(k+q)S\cdot(k\sigma_1{}^2-q\sigma_2{}^2)\cdot Shd(k-q)}{4\left(S(S-4k^2\nu)-8k^3\nu^2(k+q)\right)}+\frac{k(k-q)S\cdot(k\sigma_1{}^2+q\sigma_2{}^2)\cdot Shd(k+q)}{4\left(S(S-4k^2\nu)-8k^3\nu^2(k-q)\right)};$$

$$R_{12}=-\frac{E_0{}^2k^2}{8\pi}-\frac{\rho(S+2k^2\nu)}{4\nu}\cdot\sigma_1{}^2+\frac{\rho(S+k^2\nu)}{2\nu}\cdot\sigma_2{}^2+\frac{ik(S+6k^2\nu)\rho}{2}\cdot\sigma_1\cdot Chdk-$$

$$-ik(2S+3k^2\nu)\rho\cdot\sigma_1\cdot Chdq+\frac{iq(S+6k^2\nu)\rho}{2}\cdot\sigma_2\cdot Shdk-ik(2S+3k^2\nu)\rho\cdot\sigma_2\cdot Shdq+$$

$$+\frac{kS(3S+2k(3k-q)\nu)\rho}{2(3k-q)\nu(S+2k(k+q)\nu)}\cdot\sigma_1\cdot\sigma_2\cdot Shd(k-q)-\frac{kS(3S+2k(3k+q)\nu)\rho}{2(3k+q)\nu(S+2k(k-q)\nu)}\cdot\sigma_1\cdot\sigma_2\cdot Shd(k+q)+$$

$$+\frac{k(k+q)(3S+2k(3k-q)\nu)\rho}{2(3k-q)(S+2k(k+q)\nu)}\cdot(k\sigma_1{}^2-q\sigma_2{}^2)\cdot Chd(k-q)+$$

$$+\frac{k(k-q)(3S+2k(3k+q)\nu)\rho}{2(3k+q)(S+2k(k-q)\nu)}\cdot(k\sigma_1{}^2+q\sigma_2{}^2)\cdot Chd(k+q);$$

$$R_{13}=-k^3\cdot\sigma_1\cdot Shdk+k^2q\cdot\sigma_1\cdot Shdq-k^2q\cdot\sigma_2\cdot Chdk+k^2q\cdot\sigma_2\cdot Chdq-$$

$$-\frac{iS(k+q)(S+2k(3k+q)\nu)}{8\nu^2(3k+q)(S+2k(k-q)\nu)}\cdot\sigma_1\cdot\sigma_2\cdot Chd(k+q)+\frac{iS(k-q)(S+2k(3k-q)\nu)}{8\nu^2(3k-q)(S+2k(k+q)\nu)}\cdot\sigma_1\cdot\sigma_2\cdot Chd(k-q)-$$

$$-\frac{iS(S+2k(3k-q)\nu)}{8\nu^2(3k-q)(S+2k(k+q)\nu)}\cdot(k\sigma_1{}^2-q\sigma_2{}^2)\cdot Shd(k-q)-$$

$$-\frac{iS(S+2k(3k+q)\nu)}{8\nu^2(3k+q)(S+2k(k-q)\nu)}\cdot(k\sigma_1{}^2+q\sigma_2{}^2)\cdot Shd(k+q);$$

$$R_{21}=-\frac{ik(S(S-4k^2\nu)-8k^4\nu^2)}{4\nu S(S-8k^2\nu)}\cdot\sigma_1{}^2+\frac{2ik^3(S+k^2\nu)}{S(S-8k^2\nu)}\cdot\sigma_2{}^2;$$

$$R_{22}=-\frac{4k^4\nu q}{S(S-8k^2\nu)}\cdot\sigma_1\cdot\sigma_2;$$

$$\sigma_1=-\frac{i(qS(S+2k^2\nu)Chdk-2k^2qS\nu Chdq+q\omega_0^2Shdk-k\omega_0^2Shdq)}{k(q(S+4k^2\nu)(1-ChdkChdq)+k(3S+4k^2\nu)ShdkShdq)};$$

$$\sigma_2=\frac{i(\omega_0^2Chdk-\omega_0^2Chdq+S(S+2k^2\nu)Shdk-2kqS\nu Shdq)}{q(S+4k^2\nu)(1-ChdkChdq)+k(3S+4k^2\nu)ShdkShdq}.$$

Комплексная частота S, определяется как решение дисперсионного уравнения задачи $Det\ M=0$, где матрица M задана формулой

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -i\ \frac{q}{k} & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 & 0 \\ -k\ Sh\ dk & -k\ Ch\ dk & i\ k\ Ch\ dq & i\ k\ Sh\ dq & S \\ -\nu\ (k^2+q^2)\rho\ Ch\ dk & -\nu\ (k^2+q^2)\rho\ Sh\ dk & 2i\ \nu\ \rho\ k\ q\ Sh\ dq & 2i\ \nu\ \rho\ k\ q\ Ch\ dq & -\frac{\rho}{k}\ \omega_0{}^2 \\ -2i\ k^2\ Sh\ dk & -2i\ k^2\ Ch\ dk & -(k^2+q^2)\ Ch\ dq & -(k^2+q^2)\ Sh\ dq & 0 \end{pmatrix};$$

$$\omega_0^{\,2} = gk\left(1 + \frac{\gamma}{\rho g}k^2 - \frac{E_0^{\,2}}{4\pi\rho g}k\right).$$

Отметим, что в [15] дисперсионное уравнение выписано в явном виде после раскрытия определителя.

Полученное решение, конечно, весьма громоздко и неудобно для использования в аналитическом виде, однако оно обладает неоспоримым преимуществом, так как получено в строгой аналитической процедуре и пригодно для слоев жидкости любой толщины. Переходя в полученных выражениях к пределу тонких слоев жидкости, можно получить все результаты, характерные для тонких пленок вязкой жидкости, свободные от характерных для таких задач [18–22, 24–26] допущений: о разновеликости производных по горизонтальной и вертикальной пространственным переменным, о независимости давления от вертикальной координаты и т.п. Найденное выше решение в различных асимптотиках должно давать и нелинейные периодические и уединенные волны.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 03–01–00760 и гранта Президента РФ № МК 929.2003.01.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ламб Г.* Гидродинамика. Л., 1947.
2. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика / Под ред. И.А. Кибеля Ч. 1. Л., 1963.
3. *Гольдштейн Р.В., Городцов В.А.* Механика сплошных сред. Ч. 1. М., 2000.
4. *Стокер Дж.* Волны на воде. М., 1959.
5. *Ле Меоте Б.* Введение в гидродинамику и теорию волн на воде. Л., 1974.
6. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М., 1977.
7. *Tsamopoulos J. A., Brown R. A.* Nonlinear oscillation of inviscid drops and bubbles // J. Fluid Mech. 1983. V. 127. P. 519–537.
8. *Нестеров С.В.* Задача Коши-Пуассона для вынужденных волн конечной амплитуды // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 4. С. 116–121.
9. *Курочкина С.А., Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* Об устойчивости волновых течений в тонких слоях жидкости с заряженной свободной поверхностью. Волны малой амплитуды // Электронная обработка материалов. 2003. № 3. С. 26–36.
10. *Белоножко Д.Ф., Климов В.А., Григорьев А.И.* Нелинейные капиллярно-гравитационные волны на заряженной поверхности идеальной жидкости // Там же. 2003. № 6. С. 55–59.
11. *Ширяева С.О.* Нелинейные осцилляции заряженной капли при многомодовой начальной деформации равновесной формы // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 3. С. 163–174.
12. *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Волкова М.В., Коромыслов В.А.* О резонансном взаимодействии нелинейных осцилляций заряженной капли, находящейся во внешней диэлектрической среде // Электронная обработка материалов. 2003. № 5. С. 30–36.
13. *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. М., 1959.
14. *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* Капиллярные неустойчивости заряженной поверхности капель и электродиспергирование жидкостей (обзор) // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
15. *Григориев А.И. Ширяева С.О., Коромыслов В.А., Белоножко Д.Ф.* Капиллярные колебания и неустойчивость Тонкса–Френкеля слоя жидкости конечной толщины // ЖТФ. 1997. Т. 67. № 8. С. 27–33.
16. *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И., Ширяева С.О.* Неустойчивость плоской границы раздела двух несмешивающихся проводящих вязких жидкостей в нормальном электростатическом поле // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 6. С. 116–123.
17. *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* Капиллярные колебания вязкоупругой среды под влиянием постоянного внешнего воздействия // ЖТФ. 2000. Т. 70. № 11. С. 15–23.
18. *Chia-Shun Yin.* Stability of liquid flow down inclined plane // The Physics of Fluids. 1963. V. 6. № 3. P.321–334.
19. *Крылов В.С., Воротилин В.П., Левич В.Г.* К теории волнового движения тонких пленок жидкости // ТОХТ. 1969. Т.3. № 4. С.499–507.

20. *Демехин Е.А., Каплан М.А., Шкадов В.Я.* О математических моделях теории тонких слоев вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 6. С. 73–81.
21. *Бояджиев Х., Бешков В.* Массоперенос в движущихся пленках жидкости. М., 1988.
22. *Jenn-Sen Lin, Chi-Chuan Hwang*. Finite amplitude long-wave instability of power-low films // Int. J. of Non-Linear Mechanics. 2000. V.35. P. 769–777.
23. *Ильичев А.Т.* Уединенные волны в средах с дисперсией и диссипацией (обзор) // Изв. РАН. МЖГ.. 2000. № 2. С. 3–27.
24. *Davy A.* Propagation of weak nonlinear wave // J. Fluid Mech. 1972. V. 53. № 4. P. 769–781.
25. *Hooper A.P.* Nonlinear instability between two viscous fluids // Phys. Fluids. 1985. V.28. № 1. P. 37–45.
26. *Gonzalez A., Castellanos A.* Kortweg-de-Vries-Burgers equation for surface waves in nonideal conducting liquids // Phys. Rev. E. 1994. V. 49. № 4. P. 2935–2940.
27. *Gonzalez A., Castellanos A.* Nonlinear electrohydrodynamic waves on films falling down an inclined plane // Ibid. 1996. V. 53. № 4. P. 3573–3578.
28. *Zinchenko A.Z., Rother M.A., Davis R.H.* A novel boundary -integral algorithm for viscous interaction of deformable drops // Phys. Fluids. 1997. V.9. № 6. P. 1493–1511.
29. *Kim N.C., Dobnath L.* Resonance wave interactions in weakly viscous liquid // International Journal of Non-Linear Mechanics. 1999. V. 34. P. 197–220.
30. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика / Под ред. И.А. Кибеля Ч. 2. М., 1948.
31. *Богоряд И.Б., Христенко Г.В.* О демпфировании нелинейных колебаний вязкой жидкости, частично заполняющей сосуд // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 5. С. 158–162.
32. *Ахманов С.А., Емельянов В.И., Коротеев Н.И., Семиногов В.В.* Воздействие мощного лазерного излучения на поверхность полупроводников и металлов: нелинейно-оптические эффекты и нелинейно-оптическая диагностика // УФН. 1985. Т. 147. № 4. С. 675–746.
33. *Ширяева С.О., Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* О влиянии заряда на формирование волнового микрорельефа на поверхности вязкоупругой среды // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. № 21. С. 12–20.
34. *Зубарев Н.М.* Точное решение задачи о равновесной конфигурации заряженной поверхности жидкого металла // ЖЭТФ. 1999. Т. 116. № 6. С. 1990–2005.
35. *Суворов В.Г.* К численному моделированию динамики жидкой проводящей поверхности в сильном электрическом поле // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. № 1. С. 66–70.
36. *Колмаков Г.В., Лебедева Е.В.* Длинноволновая структура на заряженной поверхности жидкости // ЖЭТФ. 1999. Т. 115. № 1. С. 43–49.
37. *Lundgren T.S., Mansour N.N.* Oscillation of drops in zero gravity with weak viscous effects // J. Fluid Mech. 1988. V. 194. P. 479–510.
38. *Baker G.R., Merion D.I., Orzag S.A.* Boundary integral methods for axisymmetric and three-dimensional Raylegh-Taylor problems // Physica D. 1984. № 12. P. 19–31.
39. *Baker G.R., Merion D.I., Orzag S.A.* Vortex simulations of the Raylegh-Taylor instability // Phys. Fluids. 1980. V. 23. № 8. P. 1485–1490.
40. *Baker G.R., Merion D.I., Orzag S.A.* Generalized vortex methods for free-surface flow problems // J. Fluid Mech. 1982. V. 123. P. 477–501.
41. *Shi W.T., Apfel R.E.* Instability of a deformed liquid drop in an acoustic field // Phys. Fluids. 1995. V.7. № 11. P. 2601–2607.
42. *Hasegawa E., Yamashita S.* Finite Amplitude Waves on Elastic Plate Horizontally Seprating Two Different Fluid Streams // Bull. of JSME. 1986. V. 29. № 249. P. 787–794.
43. *Kang I.S., Legal L.G.* Small-amplitude perturbation of shape for a nearly spherical bubble in inviscid straining flow (steady shapes and oscillatory motion) // J. Fluid Mech. 1988. V. 187. P. 231–266.
44. *Kang I.S.* Dynamics of a conducting drop in time-periodic electric field // Ibid. 1993. V. 257. P. 229–264.
45. *Feng J.Q., Beard K.V.* Resonance of conducting drop in an alternating electric field // Ibid. 1991. V. 222. P. 417–435.
46. *Fedorov A.V, Melvil W.K.* Nonlinear gravity-capillary waves with forcing and dissipation // Ibid. 1998. V. 354. P. 1–42.
47. *Fedorov A.V, Melvil W.K., Rozenberg A.* An experimental and numerical study of parasitic capillary waves // Physics of fluids. 1998. V.10. № 6. P. 1315–1323.
48. *Yang Y., Tryggvason G.* Dissipation of energy by finite-amplitude surface waves // Computer & Fluids. 1998. V. 27. № 7. P. 829–845.

49. *Lundgren T.S., Koumoutsakos P.* On the generation of vorticity at a free surface // J. Fluid Mech. 1999. V. 382. P. 351–366.
50. *Miles J.W.* On the generation of surface waves by shear flows // Ibid. 1957. V. 3. P. 185–204.
51. *Miles J.W.* Surface-wave generation revisited // Ibid. 1993. V. 256. P. 427–441.
52. *Кузнецов Е.А., Лушников П.М.* Нелинейная теория возбуждения волн ветром за счет неустойчивости Кельвина-Гельмгольца // ЖЭТФ. 1995. Т. 108. № 2. С. 614–630.
53. *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* Капиллярные колебания вязкоупругой среды под влиянием постоянного внешнего воздействия // ЖТФ. 2000. Т. 70. № 11. С. 15–23.
54. *Shugan I., Voliak K.* On the phase kings, negative frequencies, and other third-order peculiarities of modulated surface waves // J. Fluid Mech. 1998. V. 368. P. 321–338.
55. *Юэн Г., Лэйк Б.* Нелинейная динамика гравитационных волн на глубокой воде. М., 1987.
56. *Тюрина А.В., Эль Г.А.* Гидродинамика модулированных волн конечной амплитуды в диспергирующих средах // ЖЭТФ. 1999. Т. 115. № 3. С. 1116–1136.
57. Нелинейные волны / Под. ред. С. Лейбовича и А. Сибасса. М., 1977.
58. Нелинейные волновые процессы. Новое в зарубежной науке. Механика. М., 1987.
59. *Найфэ А.Х.* Введение в методы возмущений. М., 1984.
60. *Найфэ А.Х.* Методы возмущений. М., 1976.
61. *Боголюбов Н.Н., Митропольский О.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., 1958.
62. *Ширяева С.О., Белоножко Д.Ф., Световой В.Б., Григорьев А.И.* Формулировка задач об аналитическом расчете нелинейных движений вязкой жидкости со свободной поверхностью. Препринт N.31. ИМИ РАН. Ярославль, 2001.
63. *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И., Ширяева С.О.* Асимптотическое решение задачи о нелинейных волнах в вязкой жидкости // Письма в ЖТФ. 2002. Т.28. Вып.19. С. 1–9.
64. *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* Волны конечной амплитуды на поверхности вязкой глубокой жидкости // ЖТФ. 2003. Т.73. Вып. 4. С. 28–37.
65. *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* Нелинейные движения вязкой жидкости со свободной поверхностью // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 2. С. 184–192.
66. *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* Волны конечной амплитуды на поверхности вязкой глубокой жидкости // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 4. С. 28–37.
67. *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* Нелинейные движения вязкой жидкости со свободной поверхностью // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 2. С. 184–192.
68. *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* Нелинейные электрокапиллярные волны на заряженной поверхности идеальной жидкости // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. Вып. 18. С. 46–51.
69. *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* Нелинейные периодические волны на заряженной поверхности вязкой электропроводной жидкости // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 11. С. 37–45.
70. *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* Нелинейные периодические волны на заряженной поверхности глубокой маловязкой, электропроводной жидкости // Там же. 2004. Т. 74. Вып. 3. С. 5–13.
71. *HarisonW.J.* // Proc. London. Math. 1908. Ser. 2 Vol. 7. P. 107–121.
72. *Nayfeh A.H, Hansan S.D.* The method of multiple scales and non-linear dispersive waves // J. Fluid Mech. 1971. V. 48. Part 3. P. 463–475.

Поступила 02.02.04

Summary

Survey of existing methods of taking into account liquid viscosity in the problems of calculation of nonlinear capillary-gravitational waves on a free surface of liquids is carried out. Profile of nonlinear capillary-gravitational waves in the layer of viscous liquid of a finite depth have been obtained.