

А.И. Григорьев, С.О. Ширяева, М.В. Волкова, Е.О. Филиппова

О НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ОКРЕСТНОСТИ НЕЛИНЕЙНО-ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ ЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ

*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия*

1. В связи с проблемой инициирования разряда линейной молнии, которая согласно существующим представлениям может начаться с коронного разряда в окрестности капли или градины, свободно падающей в грозовом облаке [1, 2], представляет интерес расчет напряженности электростатического поля собственного заряда капли, совершающей капиллярные осцилляции в окрестности равновесной сферической формы. Натурные измерения зарядов на каплях в грозовых облаках показывают, что величины зарядов на каплях достаточно малы [3]. Во всяком случае, они недостаточны для того, чтобы напряженность электростатического поля собственного заряда у поверхности сферической капли достигала $E_+ \approx 20$ кВ/см, при которой возможно зажигание коронного разряда, и тем более они меньше критического по Рэлею значения в смысле устойчивости капли по отношению к собственному заряду [2]. В то же время известно, что амплитуда осцилляций дождевых и крупных ($R \geq 1$ мм) облачных капель достигает величины, сравнимой с радиусом капли [4, 5]. В этой связи представляется целесообразным рассчитать напряженность поля собственного заряда у вершин нелинейно-осциллирующей капли, поскольку из общефизических соображений понятно, что напряженность поля должна увеличиваться с ростом амплитуды осцилляций.

2. Рассмотрим эволюцию во времени формы поверхности капли идеальной, несжимаемой идеально проводящей жидкости с плотностью ρ , коэффициентом поверхностного натяжения σ . Примем, что капля находится в вакууме, ее полный заряд равен Q , а объем определяется объемом сферы с радиусом R . Пусть в начальный момент времени $t = 0$ равновесная сферическая форма капли претерпела виртуальное осесимметричное возмущение фиксированной амплитуды, существенно меньшей радиуса капли. Зададимся целью определить спектр возникающих в такой ситуации капиллярных осцилляций капли (форму капли) в последующие моменты времени $t > 0$. В нижеследующих рассуждениях будем пользоваться безразмерными переменными, в которых $R = \rho = \sigma = 1$.

Поскольку начальное возмущение поверхности капли осесимметрично и мало, введем следующие упрощения: форму поверхности капли будем принимать осесимметричной как в начальный момент, так и во все последующие моменты времени, а уравнение, описывающее поверхность капли, в полярной системе координат с началом в центре капли представим в виде

$$r(\theta, t) = 1 + \xi(\theta, t) \quad |\xi| \ll 1.$$

Движение жидкости в капле будем полагать потенциальным, то есть примем, что поле скоростей движения жидкости в капле $\vec{V}(\vec{r}, t) = \nabla\Phi(\vec{r}, t)$ полностью определяется функцией потенциала скорости $\Delta\Phi(\vec{r}, t)$.

Система уравнений, описывающих эволюцию капли, в изложенной формулировке будет состоять из системы уравнений Лапласа для потенциала скорости $\Delta\Phi(\vec{r}, t)$ и электростатического потенциала: $\Phi(\vec{r}, t)$

$$\Delta\Phi(\vec{r}, t) = 0; \quad \Delta\Phi(\vec{r}, t) = 0;$$

и граничных условий:

$$r \rightarrow 0: \Psi(\vec{r}, t) \rightarrow 0;$$

$$r \rightarrow \infty: \Phi(\vec{r}, t) \rightarrow 0;$$

$$r = 1 + \xi(\theta, t): \quad \Phi = const. \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta};$$

$$\Delta P - \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{1}{2} (\nabla \Psi)^2 + \frac{1}{8\pi} (\nabla \Phi)^2 = \nabla \cdot \vec{n}.$$

$$t = 0: \quad \xi(\theta, t) = \xi_0 + \varepsilon P_k(\cos \theta); \quad (k \geq 2); \quad \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} = 0;$$

$$-\frac{1}{4\pi} \oint_S (\vec{n} \cdot \nabla \Phi) dS = Q, \quad S = \begin{cases} r = 1 + \xi(\theta, t); \\ 0 \leq \theta \leq \pi; \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \end{cases}$$

$$\int_V r^2 \cdot dr \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi = \frac{4\pi}{3}, \quad V = \begin{cases} r = 1 + \xi(\theta, t); \\ 0 \leq \theta \leq \pi; \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

$$\int_V \vec{e}_r \cdot r^3 \cdot dr \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi = 0,$$

ΔP – перепад постоянного давления внутри и вне капли в состоянии равновесия; ε – амплитуда начального возмущения формы поверхности капли; $P_k(\cos \theta)$ – полиномы Лежандра порядка k ; ξ_0 – константа, определяемая из условия (10) и с точностью до слагаемого 2-го порядка малости равная:

$$\xi_0 = -\varepsilon^2 \frac{1}{(2k+1)} + O(\varepsilon^3).$$

Проводя решение сформулированной нелинейной задачи методом многих масштабов [6], как это делалось ранее в [7 – 9], найдем аналитическое выражение для образующей формы капли:

$$\begin{aligned} \xi(\theta, t) \approx & 1 + \varepsilon \cdot \cos(\omega_k t) \cdot P_k(\mu) - \\ & - \varepsilon^2 \cdot \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{(2k+1)} [1 + \cos(2\omega_k t)] + \sum_{j=1}^k \left[(\lambda_{k,k,2j}^{(-)} + \lambda_{k,k,2j}^{(+)}) \cdot \cos(\omega_{2j} t) - (\lambda_{k,k,2j}^{(-)} - \lambda_{k,k,2j}^{(+)}) \cdot \cos(2\omega_k t) \right] \right\} \cdot \\ & \cdot P_{2j}(\cos \theta) \} + O(\varepsilon^3 t); \quad \mu \equiv \cos \theta \end{aligned}$$

$$\omega_n^2 \equiv n(n-1)[(n+2) - W]; \quad W \equiv \frac{Q}{4\pi}; \quad \lambda_{mnl}^{(\pm)} \equiv \frac{[\gamma_{mnl} \pm \omega_n \omega_l \eta_{mnl}]}{[\omega_n^2 - (\omega_m \mp \omega_l)^2]};$$

$$\begin{aligned} \gamma_{mnl} \equiv & K \left[\omega_m^2 \cdot (n-m+1) + 2n[l(l+1) - 1] + [l(m+1) - m(2m-2n+7) + 3] \cdot \frac{nW}{2} \right] + \\ & + \alpha_{mnl} \left[\frac{1}{m} \omega_m^2 + n \frac{W}{2} \right]; \end{aligned}$$

$$\eta_{mnl} \equiv K_{mnl} \left(\frac{n}{2} - m + 1 \right) + \alpha_{mnl} \cdot \frac{1}{m} \cdot \left(1 + \frac{n}{2l} \right);$$

$$K_{mnl} \equiv [C_{m0n0}^{l0}]^2; \quad \alpha_{mnl} \equiv -\sqrt{m(m+1)l(l+1)} \cdot C_{m0n0}^{l0} \cdot C_{m(-1)n1}^{l0}$$

$[C_{m0n0}^{l0}]$ и $[C_{m(-1)n0}^{l0}]$ – коэффициенты Клебша–Гордана [10].

3. Поскольку наша задача заключается в расчете величины напряженности электростатического поля собственного заряда нелинейно-осциллирующей капли, выпишем электростатические задачи нулевого, первого и второго порядков для отыскания электростатического потенциала капли:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi(\vec{r}, t) &= 0; & \vec{E} &= -\nabla\Phi \\ r \rightarrow \infty: & & \Phi &\rightarrow 0 \\ r = R + \xi: & & \Phi(\vec{r}, t) &= \text{const}(t); \\ \frac{1}{4\pi} \oint_S \text{grad}\Phi \cdot dS &= Q, & S &= \begin{cases} r = R + \xi(\theta, t); \\ 0 \leq \theta \leq \pi; \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases} \end{aligned}$$

Решение ищем в виде разложения:

$$\Phi(\vec{r}, t) = \Phi^{(0)}(r, \theta, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon \cdot \Phi^{(1)}(r, \theta, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 \cdot \Phi^{(2)}(r, \theta, T_0, T_1, T_2) + O(\varepsilon^3).$$

Подставляя это разложение в выписанную электростатическую задачу, получим ее разложение по порядкам малости.

$$\begin{aligned} \text{В нулевом:} & \Delta\Phi^{(0)} = 0; \\ r \rightarrow \infty: & \Delta\Phi^{(0)} = 0; \quad |\nabla\Phi^{(0)}| < \infty; \\ \Phi^{(0)}|_{r=1} &= \Phi_S^{(0)}; \quad -\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \Big|_{r=1} \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{В первом:} & \Delta\Phi^{(1)} = 0; \\ r \rightarrow \infty: & |\nabla\Phi^{(1)}| < \infty; \\ \Phi^{(1)}|_{r=1} &= \Phi_S^{(1)}(t) - \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \Big|_{r=1} \xi^{(1)}; \\ \int_0^\pi \int_0^{2\pi} & \left(\frac{d\Phi^{(1)}}{dr} \Big|_{r=1} + \frac{d^2\Phi^{(0)}}{dr^2} \Big|_{r=1} \xi^{(1)} + 2\xi^{(1)} \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \Big|_{r=1} \right) \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Во втором:} & \Delta\Phi^{(2)} = 0; \\ r \rightarrow \infty: & |\nabla\Phi^{(2)}| < \infty; \\ \Phi^{(2)}|_{r=1} &= \Phi_S^{(2)}(t) - \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \Big|_{r=1} \xi^{(2)} - \frac{1}{2} \frac{d^2\Phi^{(0)}}{dr^2} \Big|_{r=1} (\xi^{(1)})^2 - \frac{d\Phi^{(1)}}{dr} \Big|_{r=1} \xi^{(1)}; \\ \int_0^\pi \int_0^{2\pi} & \left\{ \left(\frac{d^2\Phi^{(0)}}{dr^2} \Big|_{r=1} + 2 \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \Big|_{r=1} \right) \xi^{(2)} + \left(\frac{1}{2} \frac{d^3\Phi^{(0)}}{dr^3} \Big|_{r=1} + 2 \frac{d^2\Phi^{(0)}}{dr^2} \Big|_{r=1} + \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \Big|_{r=1} \right) \times (\xi^{(1)})^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{d^2\Phi^{(1)}}{dr^2} \Big|_{r=1} + 2 \frac{d\Phi^{(1)}}{dr} \Big|_{r=1} \right) \xi^{(1)} + \frac{d\Phi^{(2)}}{dr} \Big|_{r=1} - \frac{d\Phi^{(1)}}{dr} \Big|_{r=1} \cdot \frac{d\xi^{(1)}}{d\theta} \right\} \cdot \sin\theta d\theta d\varphi = 0. \end{aligned}$$

Решение сформулированной задачи приводит к выражению для электростатического потенциала:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}, t) &= \frac{Q}{r} + \varepsilon Q \left[\sum_{n=2}^{\infty} M_n^{(1)} + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} F_n^{(2)}(t) \right] \cdot r^{-(n+1)} \cdot P_n(\mu); \\ F_n^{(2)}(t) &\equiv M_n^{(2)}(t) + \sum_{m,l=2}^{\infty} m \cdot K_{mln} \cdot M_m^{(1)} \cdot M_l^{(1)}(t); \\ M_n^{(1)}(t) &= \delta_{nk} \cdot \cos(\omega_n t); \quad M_n^{(2)}(t) = -N_n(0) \cdot \cos(\omega_n t) + N_n(t); \end{aligned}$$

$$N_n(t) = \frac{1}{2}(\lambda_{kkn}^{(-)} + \lambda_{kkn}^{(+)} \cdot \cos(2\omega_k t)).$$

Напряженность электростатического поля $\vec{E}(\vec{r}, t) \equiv -grad\Phi(\vec{r}, t)$ в окрестности нелинейно-осциллирующей заряженной капли будет иметь вид

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \left\{ \frac{Q}{r^2} + \varepsilon \cdot Q \cdot \left[\sum_{n=2}^{\infty} M_n^{(1)}(t) + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} F_n^{(2)}(t) \right] \cdot (n+1) \cdot r^{-(n+2)} P_n(\mu) \right\} \times \\ \times \vec{n}_r + \left\{ \varepsilon \cdot Q \left[\sum_{n=2}^{\infty} M_n^{(1)}(t) + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} F_n^{(2)}(t) \right] \cdot r^{-(n+2)} (1-\mu)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \mu} \right\} \cdot \vec{n}_\theta;$$

где \vec{n}_r и \vec{n}_θ – орты сферической системы координат.

Непосредственно на поверхности капли тангенциальная к поверхности идеально проводящей жидкости компонента напряженности E_τ обратится в ноль, а нормальная E_n будет иметь вид

$$r = R + \xi: \quad E_n = Q + \varepsilon \cdot Q \cdot \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \cdot M_n^{(1)}(t) + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \left[[(n-1) - (n+1)\delta_{n0}] \cdot M_n^{(2)}(t) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{m,l=2}^{\infty} \left([(1-\delta_{n0}) \cdot (n+1) \cdot m + 3 - (m+1) \cdot (m+2)] \cdot K_{mln} + \frac{1}{2} \alpha_{mln} \right) \cdot M_m^{(1)}(t) \times M_l^{(1)}(t) \right] \right\} \cdot P_n(\mu).$$

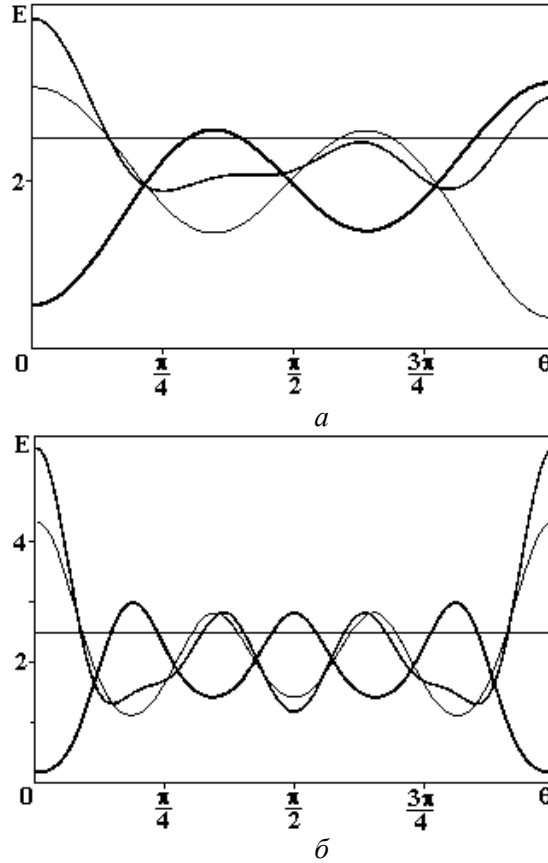


Рис.1. Зависимости от полярного угла напряженности электростатического поля на поверхности нелинейно-осциллирующей капли при $W = 0,4$, когда в начальный момент времени возбуждена третья мода с амплитудой: а – $\varepsilon = 0,3$: тонкая линия соответствует моменту времени $t = 0$; средняя линия $t = 1,4295$, когда поле на оси максимально; жирная линия $t = 2,9483$, когда поле на оси минимально; б – $\varepsilon = 0,1$: тонкая линия соответствует моменту времени $t = 0$; средняя линия – $t = 0,891$, когда поле на оси максимально; жирная линия – $t = 1,899$, когда поле на оси минимально

В использованных безразмерных переменных для капли воды с $R = 1$ мм критическая для зажигания коронного разряда величина напряженности электростатического поля равна $\approx 2,5$. На рис. 1 и 3 соответствующее значение напряженности указано прямой линией, параллельной оси абсцисс. Видно, что заметную часть времени осцилляций напряженность поля у вершин капли достаточно

велика для зажигания коронного разряда в ее окрестности, причем этот эффект более очевиден для случая, когда начальная деформация определяется шестой модой. Интересно, что весь обсуждаемый феномен связан с осцилляциями более высоких мод, чем основная ($n = 2$), с раскачкой которой традиционно [2, 11, 12] связывалась возможность зажигания коронного разряда в окрестности капли. При этом величина напряженности поля у поверхности капли растет с ростом номера изначально возбужденной моды. Это может быть связано с тем, что при начальном возбуждении высоких мод энергия, вносимая в колебательную систему, при прочих равных условиях, растет пропорционально квадрату номера моды. На этом основании (чтобы вносимая в колебательную систему энергия в двух выше рассмотренных случаях не отличалась слишком сильно) в проведенных расчетах начальная амплитуда третьей моды бралась существенно большей начальной амплитуды шестой моды.

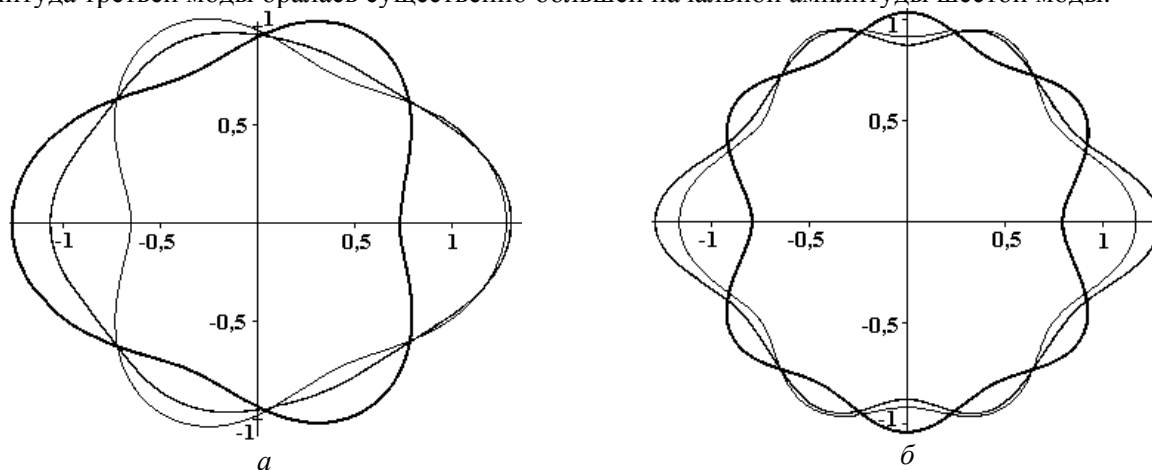


Рис.2. Формы образующей нелинейно-осциллирующей капли в различные моменты времени: а – тонкая линия соответствует моменту времени $t = 0$; средняя линия – $t = 1,4295$, когда поле на оси максимально; жирная линия – $t = 2,9483$, когда поле на оси минимально; б – тонкая линия соответствует моменту времени $t = 0$; средняя линия – $t = 0,891$, когда поле на оси максимально; жирная линия – $t = 1,899$, когда поле на оси минимально

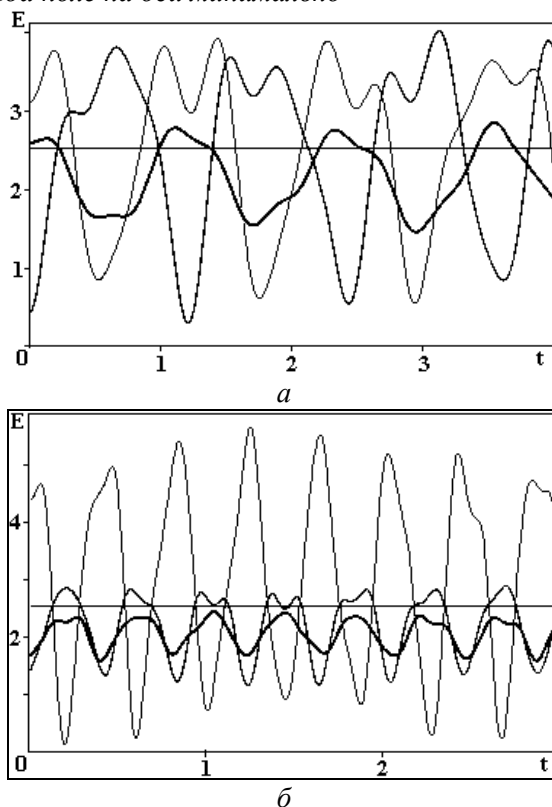


Рис.3. Временные зависимости величины напряженности на поверхности капли для начального возбуждения третьей моды при различных значениях полярного угла: а – тонкая линия соответствует $\theta = 0$; средняя линия – $\theta = \pi$; жирная линия – $\theta = 2\pi/3$; б – тонкая линия соответствует $\theta = 0$; средняя линия – $\theta = \pi/2$; жирная линия – $\theta = \pi/4$

4. Заключение. При нелинейных осцилляциях слабо заряженной капли напряженность электростатического поля у ее вершин может превышать значение, критическое для зажигания коронного разряда в окрестности капли.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дячук В.А., Мучник В.М. Коронный разряд обводненной градины, как основной механизм инициирования молнии // ДАН СССР. 1979. Т. 248. № 1. С. 60–63.
2. Grigor'ev A.I., Shiryayeva S.O. The possible physical mechanism of initiation and growth of lightning // Physica Scripta. 1996. V. 54. P. 660–666.
3. Облака и облачная атмосфера. Справочник. Л., 1989.
4. Beard K.V. Cloud and precipitation physics research 1983 –1986 // Rev.Geophys. 1987. V. 25. № 3. P. 357–370.
5. Стерлядкин В.В. Натурные измерения колебаний капель осадков // Физика атмосферы и океана. 1988. Т. 24. № 6. С. 613–621.
6. Найфе А. Методы возмущений. М., 1976.
7. Ширяева С.О. Нелинейные осцилляции заряженной капли при многомодовой начальной деформации равновесной формы // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 3. С. 173–184.
8. Ширяева С.О., Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И., Голованов А.С. Нелинейные капиллярные колебания заряженной капли // Электронная обработка материалов. 2001. № 2. С. 26–34.
9. Ширяева С.О. О внутреннем резонансе мод нелинейно-осциллирующей объемно заряженной диэлектрической капли // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып.2. С. 19–30.
10. Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. Л., 1975.
11. Бейтуганов М.Н. Об обусловленных сильными электрическими полями физических явлениях в облаках // Метеорология и гидрология. 1989. № 9. С. 42–49.
12. Григорьев А.И., Ширяева С.О. Капиллярные неустойчивости заряженной поверхности капель и электродиспергирование жидкостей (обзор) // МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.

Поступила 14.03.03

Summary

It is shown that at non-linear oscillations of weakly charged drop (when Rayleigh parameter for the drop is by an order of magnitude lesser than critical one for realization of instability) the electrostatic field intensity in the vicinity of the drop can reach the value at which the corona discharge can take place.
