

О моделировании коронного разряда методами теории подобия

Ф. П. Гросу^а, Ан. М. Болога^б, М. К. Болога^а, О. В. Моторин^а

^аИнститут прикладной физики АНМ,

ул. Академическая, 5, г. Кишинев, MD-2028, Республика Молдова, e-mail: mbologa@phys.asm.md

^бТехнологический Институт Карлсруэ, Институт Технической Химии

Герман фон Гельмгольц Пл.1, Эггенштайн – Леопольдсхафен, 76344, Германия, e-mail: andrei.bologa@kit.edu

Сформулирована общая система уравнений коронного разряда, которая методами теории подобия и размерностей приведена к безразмерному виду. Установлены критерии и условия подобия процессов при коронном разряде. Получены формулы для плотностей свободных объемных зарядов и подтверждена классическая структура вольт-амперной характеристики для произвольной системы электродов различными методами: подобия, путем анализа автомодельных решений; аппроксимации распределения поля; усреднения уравнения для плотности тока по объему межэлектродного пространства. Показано, что квадратичный характер вольт-амперных характеристик коронного разряда обусловлен линейной зависимостью напряженности электрического поля и линейной пороговой зависимостью плотности объемных свободных зарядов от напряжения.

Ключевые слова: коронный разряд, гелий, моделирование, теория подобия, вольт-амперные характеристики.

УДК 537.527.3

ВВЕДЕНИЕ

Наблюдаемый рост интереса к проблемам электрогидродинамики (ЭГД) [1, 2] объясняется как научной привлекательностью этой области знания, так и прикладными аспектами, связанными с появлением и развитием новых электро-технологий [3, 4], нанотехнологий [5, 6], лазерной техники [7, 8] и т.д. Актуальными представляются ЭГД-технологии, связанные с исследованиями и приложениями коронного разряда. Вопросам изучения коронного разряда посвящено большое количество научных публикаций. Обзоры основных научных результатов по данной тематике приведены в монографиях Райзера [9], Верещагина [10], Токарева [11], Стишкова [12] и др.

В последние годы получили развитие новые направления исследований в области коронного разряда, охватывающие явления в газах при высоких давлениях и температурах, в частности в гелии, азоте, синтетическом газе и их смесях [13–15], а также в аргоне и других газах при импульсном напряжении [16–19]. Особое внимание уделяется импульсным явлениям, в частности импульсам Тричеля при постоянном напряжении [17]. Исследовались и гистерезисные явления при коронном разряде [14, 18, 20], физические механизмы которых еще до конца не выяснены.

Физическая интерпретация многообразных явлений, связанных с коронным разрядом, представляет собой сложную задачу. В целях обобщения экспериментальных данных и их физического осмысливания в предлагаемой работе

предпринята попытка подойти к вопросам коронного разряда с позиций теории подобия и размерности [21]. Авторами сформулированы общие задачи коронного разряда в безразмерном виде, выявлены и проанализированы критерии подобия и следствия, вытекающие из полученных соотношений, применительно к теоретическим и натурным моделям, предназначенным для практических приложений. Рассмотрены вольт-амперные характеристики (ВАХ) коронного разряда, обсуждается их структура с позиций теории подобия, распределения электрического поля в межэлектродном пространстве (МЭП) и усреднения основного уравнения коронного разряда для плотности тока по всему объему этого пространства.

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Известно [9, 10], что в большинстве случаев коронного разряда в газах в уравнении для плотности электрического тока

$$\vec{j} = k\rho\vec{E} + \rho\vec{v},$$

где k – коэффициент подвижности ионов знака коронирующего электрода; ρ – плотность свободных зарядов; \vec{E} – напряженность электрического поля; \vec{v} – гидродинамическая скорость, пренебрегают конвективной составляющей $\rho\vec{v}$. Это оправдывается малостью конвективной составляющей по сравнению с кондуктивной (током сквозной проводимости). В таком приближении уравнения коронного разряда образуют

замкнутую, т.н. «электрическую» подсистему ЭГД относительно неизвестных векторных функций – плотности тока и напряженности поля и скалярных – электрического потенциала φ и плотности свободных зарядов:

$$\vec{j} = k\rho \vec{E}; \vec{E} = -\nabla\varphi; \rho = \nabla(\varepsilon\vec{E}); \nabla\vec{j} = 0. \quad (1)$$

Здесь ε – абсолютная диэлектрическая проницаемость, приближенно равная для газов в обычных условиях электрической постоянной ε_0 .

Сформулируем граничные условия. Будем считать, что коронирующим электродом служит катод и он заземлен ($\varphi_c = 0$). Высоковольтный электрод является анодом, и его потенциал равен напряжению между электродами ($\varphi_a = U$). Коронный разряд возникает при условии достижения приложенным напряжением критического значения $U \geq U_c$, а напряженностью поля на коронирующем электроде – критической напряженности $E \geq E_c$. На коронирующем электроде напряженность электрического поля в процессе разряда остается постоянной, равной критической E_c . Последнее условие служит одновременно условием появления отличной от нуля плотности тока и плотности объемных свободных зарядов. В итоге граничные условия принимают вид:

$$\varphi_c = 0; \varphi_a = U;$$

$$E|_c = E_c = \text{const}; E|_a = E_a(U); \quad (2)$$

$$\vec{j}|_{U < U_c} = 0; \vec{j}|_{U \geq U_c} \neq 0; \rho|_{U \leq U_c} = 0; \rho|_{U > U_c} \neq 0. \quad (3)$$

Условия (3) указывают на пороговый характер коронного разряда.

КРИТИЧЕСКОЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ

Принимая во внимание условия (3), наряду с системой электродинамики ($\vec{j} \neq 0$) (1) рассмотрим систему электростатики при критическом состоянии, которое обозначим как $U_0 \approx U_c + 0$, то есть когда объемный заряд еще не успел сформироваться, но уже имеется малый пороговый ток:

$$\begin{cases} \vec{E}_0^c(\vec{r}) = -\nabla\varphi_0^c(\vec{r}); \\ \nabla(\varepsilon\vec{E}_0^c) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где индекс «с» указывает на состояние вблизи критического, «приближенно» – электростатического, согласно второму уравнению системы (4).

Граничные условия для уравнений получают, если подставить в (2) и (3) $U = U_c$ и $E = E_c$:

$$\varphi_c = 0; \varphi_a = U_c;$$

$$E_0^c|_c = E_c = \text{const}; E_0^c|_a = E_a(U_c) \equiv E_{ac}; \quad (5)$$

$$\vec{j}|_{U=U_c} \approx 0; \rho|_{U=U_c} = 0. \quad (6)$$

Условие (6) означает электростатичность задачи.

ВОЗМУЩЕННОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Введем возмущения электростатического поля объемным зарядом:

$$\varphi'(\vec{r}) \equiv \varphi(\vec{r}) - \varphi_0^c(\vec{r}) \equiv \delta\varphi(\vec{r}); \quad (7)$$

$$\vec{E}'(\vec{r}) \equiv \vec{E}(\vec{r}) - \vec{E}_0^c(\vec{r}) \equiv \delta\vec{E}(\vec{r}),$$

где \vec{r} – радиус-вектор точки, а δ – символ вариации функции.

Система уравнений (1) в этом случае переписывается в виде

$$\begin{cases} \vec{j} = k\rho \vec{E}; \vec{E} = -\nabla\varphi; \\ \vec{E}' = -\nabla\varphi'; \rho = \nabla(\varepsilon\vec{E}'); \nabla\vec{j} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

С учетом (2), (3), (5) и (6) граничные условия для возмущений имеют вид:

$$\varphi'_c = 0; \varphi'_a = U - U_c \equiv \delta U; \quad (9)$$

$$E'|_c = E_c - E_c = \delta E_c = 0; \quad (10)$$

$$E'|_a = E_a(U) - E_a(U_c) = \delta E_a.$$

Рассматривая напряженность на аноде $E_a(U)$ как функцию напряжения U , граничное условие (10) представим в виде

$$\begin{aligned} E'_a &\approx (dE_a/dU)_{U=U_c} \cdot (U - U_c) \equiv \\ &\equiv g \cdot (U - U_c) = g \cdot \delta U; g \equiv (dE_a/dU)_{U=U_c}. \end{aligned} \quad (11)$$

Параметр g , характеризующий скорость изменения напряженности поля на аноде в зависимости от напряжения U , зависит от геометрии электродов. Например, для цилиндрической системы электрода (ЦСЭ):

$$g = 1/[R \cdot \ln(R/r_0)].$$

ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ К БЕЗРАЗМЕРНОМУ ВИДУ.

КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ

Обозначим индексом “ m ” масштабные величины, а звездочкой “*” – безразмерные искомые функции. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \vec{j} &\equiv j_m \cdot \vec{j}_*; \vec{E} \equiv E_m \cdot \vec{E}_*; \\ \rho &\equiv \rho_m \cdot \rho_*; \varphi \equiv \varphi_m \cdot \varphi_*; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \varphi' &\equiv \varphi'_m \cdot \varphi'_*; \vec{E}' \equiv E'_m \cdot \vec{E}'_*; \\ \nabla &\equiv \nabla_m \cdot \nabla_* \equiv (1/l) \cdot \nabla_* \end{aligned} \quad (13)$$

и после подстановки (12), (13) в (8) получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} j_m \cdot \vec{j}_* &= k \cdot \rho_m \cdot E_m \cdot \rho_* \cdot \vec{E}_*; \\ \rho_m \cdot \rho_* &= -(\varepsilon \cdot \varphi'_m / l^2) \cdot \nabla_*^2 \varphi'_*; \\ E_m \cdot \vec{E}_* &= -\frac{\varphi_m}{l} \cdot \nabla_* \varphi'_*; \\ E'_m \cdot \vec{E}'_* &= -(\varphi'_m / l) \cdot \nabla_* \varphi'_*; \\ (j_m / l) \cdot \nabla_* \vec{j}_* &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Сократив в (14) и (15) соответствующие множители, стоящие в уравнениях слева, приведем последние к безразмерному виду:

$$\begin{aligned} \vec{j}_* &= \pi_1 \cdot \rho_* \cdot \vec{E}_*; \quad \vec{E}_* = -\pi_2 \cdot \nabla_* \varphi'_*; \\ \vec{E}'_* &= -\pi_3 \cdot \nabla_* \varphi'_*; \\ \rho_* &= -\pi_4 \cdot \nabla_*^2 \varphi'_*; \\ \nabla_* \vec{j}_* &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

величины, отмеченные “*”, рассматриваются как *определяемые* (неизвестные), а π – как *определяющие* критерии подобия [21]:

$$\begin{aligned} \pi_1 &\equiv \frac{k \cdot \rho_m \cdot E_m}{j_m}; \quad \pi_2 \equiv \frac{\varphi_m}{l \cdot E_m}; \\ \pi_3 &\equiv \frac{\varphi'_m}{l \cdot E'_m}; \quad \pi_4 \equiv \frac{\varepsilon \cdot \varphi'_m}{\rho_m \cdot l^2}, \end{aligned} \quad (17)$$

где l – характерное расстояние, на котором меняются соответствующие функции.

С учетом (11), (12) из (2) следует:

$$\varphi_m \varphi'_*|_a = U; \quad E_m E_*|_c = E_c; \quad E_m E_*|_a = E_a.$$

Поделив на масштабные множители, находим

$$\begin{aligned} \varphi_*|_a &= U / \varphi_m; \quad E_*|_c = E_c / E_m; \\ E_*|_a &= E_a / E_m. \end{aligned} \quad (18)$$

Из (9)–(11) с учетом (12) и (13) для возмущений получим

$$\varphi'_m \varphi'_*|_a = U - U_c; \quad E'_m E'_*|_a = \delta E_a \equiv g \cdot (U - U_c)$$

или в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \varphi'_*|_a &= (U - U_c) / \varphi'_m; \\ E'_*|_c &= E_c / E'_m; \\ E'_*|_a &= \delta E_a / E'_m \equiv g \cdot (U - U_c) / E'_m. \end{aligned} \quad (19)$$

В случае приложения разности потенциалов U между электродами независимо от условий воз-

никновения коронного разряда в соответствии со второй формулой равенств (18) можно принять:

$$\varphi_m \equiv U \Rightarrow E_m \equiv U / l, \quad (20)$$

откуда следует $\pi_2 = 1$.

Единственным масштабом для возмущения потенциала, согласно условию (9), является

$$\varphi'_m \equiv U - U_c. \quad (21)$$

В случае отсутствия характерных значений для возмущения напряженности поля

$$E'_m \equiv \varphi'_m / l = (U - U_c) / l, \quad (22)$$

что, согласно (18), приводит к равенству $\pi_3 = 1$.

Так как среди граничных условий нет характерных масштабов для плотности объемных зарядов, его определяем из последней формулы (18), полагая

$$\rho_m \equiv (\varepsilon \cdot \varphi'_m) / l^2 = [\varepsilon \cdot (U - U_c)] / l^2, \quad (23)$$

то есть $\pi_4 = 1$.

Поскольку плотность тока относится к искомым величинам, в соответствии с первой формулой (18), а также (21) и (24), примем для нее в качестве масштабной единицы величину

$$j_m \equiv [k\varepsilon(U - U_c)U] / l^3, \quad (24)$$

что приводит к равенству $\pi_1 = 1$.

Таким образом, уравнения коронного разряда (16) и (17) становятся автомодельными по рассматриваемым критериям подобия, а безразмерная система (16) и (17) имеет вид:

$$\begin{aligned} \vec{j}_* &= \rho_* \cdot \vec{E}_*; \\ \vec{E}_* &= -\nabla_* \varphi'_*; \\ \vec{E}'_* &= -\nabla_* \varphi'_*; \\ \rho_* &= -\nabla_*^2 \varphi'_*; \\ \nabla_* \vec{j}_* &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

При выбранных масштабах (21)–(23) граничные условия (19) принимают вид:

$$\begin{aligned} \varphi_*|_a &= 1; \quad E_*|_c = (E_c \cdot l) / U; \\ E_*|_a &= (E_a \cdot l) / U. \end{aligned} \quad (26)$$

Для возмущений (20) получаются соответствующие выражения:

$$\varphi'_*|_a = 1; \quad E'_*|_a = \delta E_a / E'_m \equiv g \cdot l. \quad (27)$$

Таким образом, учет граничных условий для напряженностей поля приводит к появлению еще трех критериев подобия симплексного типа:

$$\begin{aligned}\pi' &\equiv (E_c \cdot l) / U; \\ \pi'' &\equiv (E_a \cdot l) / U; \\ \pi''' &\equiv g \cdot l.\end{aligned}\quad (30)$$

Дальнейший анализ показывает очевидность появления еще одного критерия в виде безразмерного напряжения:

$$(U / U_c) \equiv U_*,$$

а также критерия типа R/r_0 (для цилиндрической системы электродов), то есть критерия, который отражает геометрическое подобие экспериментальных и натуральных установок.

Для упрощения выкладок данные критерии не учитывались в приведенных выше граничных условиях. Хотя, разумеется, постановка конкретных задач с физико-математической точки зрения должна как можно точнее отражать специфику и особенности решений.

Фигурирующие в (26) и (27) неизвестные функции есть суть функции безразмерных координат и симплексов подобия, и при соблюдении геометрического подобия все решения при граничных условиях (28) и (29) будут физически подобными, применимыми для других условий, в том числе натуральных.

СЛЕДСТВИЯ

Из полученных безразмерных уравнений и соотношений вытекает ряд следствий.

Плотность свободных объемных зарядов

Исходя из последней формулы системы (14) и уравнения (24), записываем

$$\begin{aligned}\rho / \rho_m &= \rho_*(\vec{r}_*, \pi', \pi'' \dots) \Rightarrow \\ \rho &= \rho_m \cdot \rho_*(\vec{r}_*, \pi', \pi'' \dots) \Rightarrow \\ \rho &= \frac{\varepsilon \cdot (U - U_c)}{l^2} \cdot \rho_*(\vec{r}_*, \pi', \pi'' \dots).\end{aligned}\quad (31)$$

В выражении (31) масштабный фактор для ρ можно представить в виде

$$\rho_m = \rho_c (U_* - 1); \quad \rho_c \equiv \varepsilon U_c / l^2. \quad (32)$$

Отсюда следует, что плотность свободных объемных зарядов при коронном разряде определяется разностью напряжений $U - U_c$. К аналогичному выводу приводят и классические теории коронного разряда [22–24].

Вольт-амперная характеристика коронного разряда

Для нахождения выражения вольт-амперной характеристики (ВАХ) исходим из уравнения для плотности тока:

$$\begin{aligned}\vec{j}_* &= \vec{j}_*(\vec{r}_*, \pi', \pi'', \pi''', \dots) \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{j} / j_m &= \vec{j}_*(\vec{r}_*) \Leftrightarrow \vec{j}(\vec{r}) = j_m \cdot \vec{j}_*(\vec{r}_*).\end{aligned}\quad (33)$$

Здесь правые части суть символы неизвестной функции от безразмерных координат (для краткости симплексы подобия опущены). С учетом (25) уравнение (33) записывается в виде

$$\vec{j}(\vec{r}) = \text{const} \cdot \frac{\varepsilon k (U - U_c) U}{l^3} \cdot \vec{j}_*(\vec{r}_*). \quad (34)$$

Если в качестве масштаба для j_m принять отношение полного тока J к характерной площади S некоторой промежуточной эквипотенциальной поверхности, то есть $j_m = J/S$ с точностью до постоянного множителя, зависящего от симплексов типа (30), получим уравнение вольт-амперной характеристики:

$$J = \text{const} \cdot \frac{\varepsilon k (U - U_c) U}{l^3} \cdot S. \quad (35)$$

Характерные расстояние l и площадь S определяются конфигурацией и геометрией системы электродов. Предположим, что для цилиндрической системы электродов (провод в цилиндре) $l = R - r_0 \approx R$ при $R/r_0 \gg 1$, $S = 2\pi RL \sim RL$, где L – длина коронирующего электрода, r_0 – его радиус, а R – внутренний радиус внешнего цилиндрического электрода.

Если в качестве масштаба для j_m принять $j_m = J/L$, получим

$$J / L \equiv I = \text{const} \cdot \frac{\varepsilon k (U - U_c) U}{R^2} \quad (36)$$

с точностью до постоянной, совпадающей с классической формулой Таунсенда [22–24]:

$$I = \frac{8\pi \varepsilon k (U - U_c) U}{R^2 \cdot \ln(R/r_0)}. \quad (37)$$

Deutsch подтвердил эту формулу [24] и, пользуясь методом конформного отображения, получил аналогичные уравнения, показав, что для случая плоских полей общая структура ВАХ имеет параболический вид:

$$I = A \cdot U (U - U_c), \quad (38)$$

где A – константа, зависящая от свойств среды (ε , k) и геометрии системы (например, R , r_0 для цилиндрической системы электродов).

ФИЗИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ВОЛЬТ-АМПЕРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК КОРОННОГО РАЗРЯДА

Приведенные выше выкладки основываются на моделировании методами теории подобия и имеют несложный математический характер.

При этом остаются нераскрытыми физические аспекты задачи, в частности вопрос о постоянстве напряженности электрического поля ($E = E_c = \text{const}$) на поверхности коронирующего электрода, несмотря на вариации напряжения между электродами. Не ясна и степень влияния данного постоянства на ВАХ.

Чтобы ответить на эти вопросы, на примере ЦСЭ рассмотрим еще один подход к подтверждению формулы (38), связанный с рассмотрением распределения электрического поля в межэлектродном пространстве.

Уравнения Таунсенда и распределение электрического поля в межэлектродном пространстве

Широко известное уравнение (37) относится к так называемой «второй формуле Таунсенда». Ранее им была получена «первая формула», внешне не отличающаяся от второй, но являющаяся не квадратичной, а линейной зависимостью от напряжения U [24]:

$$I = \frac{8\pi\epsilon k \cdot U_c \cdot (U - U_c)}{R^2 \cdot \ln(R/r_0)}. \quad (39)$$

Эту формулу можно использовать при малых значениях тока I , то есть когда $U \approx U_c + 0$, и, следовательно, из (37) вытекает (39).

Следуя Deutsch, представим напряженность электрического поля \vec{E} (с учетом свободного объемного заряда ρ) в виде

$$\vec{E} = \theta \cdot \vec{E}_0, \quad (40)$$

где θ – некоторая скалярная функция координат, а \vec{E}_0 – электростатическое поле, то есть напряженность поля, которая бы имела место при $\rho \equiv 0$, то есть когда $\nabla \vec{E}_0 = 0$. Функция θ играет роль коэффициента искажения электрического поля относительно неискаженного. Сущность преобразования (8) состоит в том, что оно сохраняет конфигурацию силовых линий поля [10] в смысле $\vec{E} \parallel \vec{E}_0$, что для цилиндрической симметрии не вызывает сомнений. С учетом формулы (40) [10] первое уравнение (1) принимает вид:

$$\vec{j} = \lambda \cdot \vec{E}_0; \quad \lambda \equiv k \cdot \rho \cdot \theta. \quad (41)$$

Применив к уравнению (41) операцию div , найдем $\lambda = \text{const}$. Далее согласно формулам Таунсенда (39) и (37) напряженность электростатического поля E_0 также может быть представлена двумя формулами, одна из которых соответствует порогу возникновения коронного разряда (U_c), другая – приложенному напряжению U :

$$E_0 = \begin{cases} E_0^{(1)} = U_c / [r \cdot \ln(R/r_0)], \\ E_0^{(2)} = U / [r \cdot \ln(R/r_0)]. \end{cases} \quad (42)$$

Первая формула применима для околоритических состояний и приводит к уравнению (39). Эта формула справедлива для всего межэлектродного промежутка, приводя к известной зависимости для критической напряженности поля E_c на коронирующем электроде:

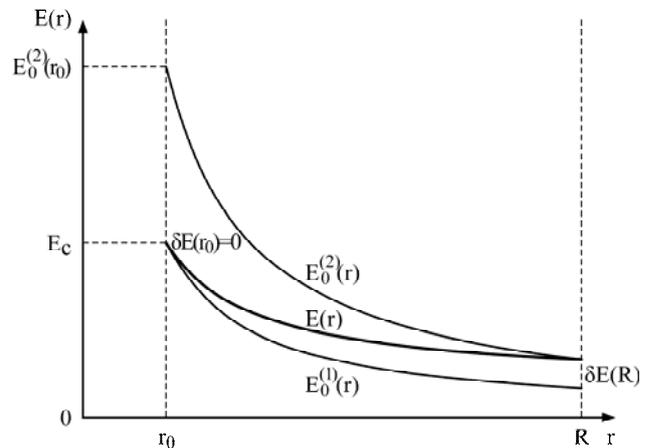
$$E(r_0) = U_c / [r_0 \cdot \ln(R/r_0)] \equiv E_c. \quad (43)$$

Вторая формула соответствует развитому коронному разряду и приводит к зависимостям (37) и (38). При этом дает *приближенный* результат для напряженности поля на внутренней поверхности цилиндрического электрода:

$$E(R) = U / [R \cdot \ln(R/r_0)]. \quad (44)$$

Истинная величина напряженности поля $E(r)$ заключена между двумя величинами:

$$E_0^{(1)}(r) \leq E(r) \leq E_0^{(2)}(r). \quad (45)$$



Распределение напряженности поля между электродами.

На начальном участке ($r = r_0$) она практически совпадает с началом кривой по первой формуле (42), то есть с E_c , а на конце ($r = R$) – *приближенно* с кривой, соответствующей второй формуле (42). Фактическое распределение поля напряженности $E(r)$ в соответствии с приведенными выше неравенствами качественно проиллюстрировано на рисунке. Следует заметить, что это распределение не подчиняется закону обратной пропорциональности $\sim 1/r$ в отличие от ограничивающих его кривых. Такой ход кривой физически обусловлен тем, что по мере развития коронного разряда увеличивается плотность свободных зарядов ρ , а заодно и их экранирующее действие на поле в окрестности коронирующего электрода. Этим и объясняется постоянство напряженности поля на коронирующем электроде. На рисунке $\delta E \equiv E - E_0^{(1)}$ есть вариация напряженности поля, которая равна нулю на левом конце кривой $E(r)$, то есть $\delta E(r_0) = 0$, и отлична от нуля $\delta E(R) \neq 0$ на аноде, что может служить мерой степени заряженности среды ($\rho \neq 0$).

Проанализируем сказанное на следующем примере. В качестве аппроксимирующей функции для $E(r)$ примем

$$E(r) = \frac{U(r)}{r \cdot \ln(R/r_0)}, \quad (46)$$

причем для простейшего случая линейной зависимости $U(r)$

$$E(r) = \frac{U(r)}{r \cdot \ln(R/r_0)} = \frac{a \cdot r + b}{r}, \quad (47)$$

где коэффициенты a и b находим из граничных соотношений (43) и (44):

$$a = \frac{U - U_c}{(R - r_0) \cdot \ln(R/r_0)}; \quad b = \frac{R \cdot U_c - r_0 \cdot U}{(R - r_0) \cdot \ln(R/r_0)}.$$

С учетом этих формул из (47) получим

$$E(r) = \frac{U \cdot (r - r_0) + U_c \cdot (R - r)}{r \cdot (R - r_0) \cdot \ln(R/r_0)}. \quad (48)$$

Именно по этой формуле построена кривая $E(r)$ на рисунке, причем, как показывают оценки, она удовлетворительно вписывается в экспериментальные данные [24].

Распределение (48) приводит к приемлемому результату для плотности объемного заряда ρ . Вычислив на основе (48) эту плотность, получим

$$\rho = \frac{\varepsilon}{r} \cdot \frac{d}{dr} [r \cdot E(r)] = \frac{\varepsilon}{r} \cdot \frac{U - U_c}{(R - r_0) \cdot \ln(R/r_0)}. \quad (49)$$

Для средней на интервале $[R; r_0]$ плотности найдем

$$\bar{\rho} = \frac{\varepsilon \cdot (U - U_c)}{(R - r_0)^2} \equiv \frac{\varepsilon \cdot U_c (U_* - 1)}{(R - r_0)^2} = \rho_c \cdot (U_* - 1), \quad (50)$$

что совпадает с масштабом для рассматриваемой величины (32).

Следует заметить, что выводы и уравнения (45), (48) и (50) носят качественно общий характер. Однако более общим с физической точки зрения подтверждением структуры формулы (38) представляется то, которое получено методом усреднения плотности тока по межэлектродному пространству. Это усреднение охватывает все особенности распределения поля, одновременно их сглаживая.

Метод усреднения по объему

Речь идет об усреднении плотности электрического тока в скалярном виде:

$$\int_V j \cdot dV = k \int_V \rho \cdot E \cdot dV. \quad (51)$$

Как вытекает из соображений размерностей, интеграл слева прямо пропорционален полной

силе тока I между электродами. Интеграл справа представим в виде

$$\int_V \rho \cdot E \cdot dV = \bar{\rho}_E \cdot \bar{E} \cdot V = \bar{E}_\rho \cdot \bar{\rho} \cdot V,$$

где индексы указывают на весовую функцию усреднения, а средние величины без индексов являются средними по объему МЭП. Из последнего равенства следует:

$$\frac{\bar{\rho}_E}{\bar{\rho}} = \frac{\bar{E}_\rho}{\bar{E}} \equiv b \Leftrightarrow \bar{\rho}_E = b \bar{\rho}; \quad \bar{E}_\rho = b \cdot \bar{E}.$$

$$\int_V \rho \cdot E \cdot dV = b \cdot \bar{\rho} \cdot \bar{E} \cdot V.$$

Из (51) получаем

$$\bar{j} = b k \bar{\rho} \cdot \bar{E}, \quad (52)$$

где b – некий коэффициент пропорциональности в «скалярном» произведении интегрируемых функций. Важно, что согласно (52) средняя плотность силы тока \bar{j} прямо пропорциональна средней плотности объемного заряда $\bar{\rho}$ и средней напряженности поля \bar{E} , которая в свою очередь согласно (21) пропорциональна масштабному напряжению $\bar{E} \sim E_m \equiv U/l$. Величина средней плотности тока пропорциональна масштабной плотности, равной отношению полного тока J к характерной площади S : $\bar{j} \sim j_m \equiv J/S$.

Остается показать, что средняя плотность зарядов $\bar{\rho}$ прямо пропорциональна разности напряжений $U - U_c$, как того требует общая структура ВАХ (38). Для этого исходим из четвертой формулы системы (8) с учетом (7):

$$\rho = \nabla(\varepsilon \cdot \delta \bar{E}).$$

Получим

$$\bar{\rho} = \frac{1}{V} \cdot \int_V \nabla(\varepsilon \cdot \delta \bar{E}) \cdot dV = \frac{\varepsilon}{V} \oint_S \delta E_n \cdot dS, \quad (53)$$

где $\delta \bar{E}$ – вариация распределения напряженности поля в МЭП (см. рисунок) от критического.

Поверхностный интеграл (53) распространяется по поверхностям электродов – катода и анода, причем на поверхности коронирующего электрода эта вариация равна нулю согласно первому условию (10).

Следовательно, в (53) остается интеграл только по поверхности анода, и с учетом пропорциональности напряженности поля на нем его напряжению согласно (11):

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \frac{\varepsilon}{V} \cdot \int_{S_A} (E_a - E_c) \cdot dS = \\ &= \frac{\varepsilon}{V} \cdot \int_{S_A} g \cdot (U - U_c) \cdot dS = \\ &= (U - U_c) \cdot \frac{\varepsilon}{V} \cdot \int_{S_A} g \cdot dS, \end{aligned} \quad (54)$$

Подставив в (52) найденные средние величины, в точности приходим к формуле (38).

Таким образом, структура формулы (38) доказана различными способами. Вместе с тем это не означает окончательно, что на практике, когда речь идет о новых, еще не изученных процессах, именно формула (38) является наиболее подходящей аппроксимацией. Возможно, придется ориентироваться на более общие закономерности, что является предметом будущих исследований.

ВЫВОДЫ

1. Методами теории подобия сформулирована система уравнений с граничными и начальными условиями для коронного разряда в газах.

2. Выявлены и обсуждены критерии и условия подобия процессов при коронном разряде.

3. Установлено, что плотность объемных зарядов обусловлена линейной надкритичностью напряжения между электродами.

4. Теоретически обоснована структура вольтамперной характеристики коронного разряда для произвольной системы коронирующих электродов.

5. На примере цилиндрической системы электродов показано, что распределение поля в межэлектродном пространстве заключено между двумя электростатическими распределениями: нижним, соответствующим начальному напряжению между электродами, и верхним, соответствующим действующему напряжению.

6. С помощью аппроксимации распределения напряженности поля, удовлетворяющей краевым условиям, выведена формула для плотности объемного заряда.

7. Методом усреднения уравнения для плотности тока по объему межэлектродного пространства показано, что плотность свободных объемных зарядов определяется вариацией напряжения на некоронирующем электроде.

Работа выполнена при финансовой поддержке по двустороннему проекту АŞМ–ВМВФ 13.823.15.09/GA и институциональному проекту 11.817.05.04A.

ЛИТЕРАТУРА

- 16th IEEE International Conference on Dielectric Liquids ICDL 2008, Poitiers, France, June 30th July 3rd, 2008, *Proceedings of a meeting held 30 June – 3 July 2008*, University of Poitiers Futuroscope-Chasseneuil, France, 267 p.
- Современные проблемы электрофизики и электрогидродинамики жидкостей. *Сборник докладов X Международной научной конференции 25–28 июня 2012 года*. Санкт-Петербург. СПб.: СОЛО, 2012. 290 с.
- Басов А.М., Быков В.Г., Лаптев А.В., Файн В.Б. *Электротехнология*. М.: Агропромиздат, 1985. 256 с.
- Tanasescu F.T., Bologa M., Cramariuc R., Bologa A., Cramariuc B. *Electrotehologii. Protectia mediului, procesarea de materiale si control nedistructiv*. Bucureşti: A.G.I.R., 2011. 764 p.
- Ming-Wei Li, Zheng Hu, Xi-Zhang Wang, Quing Wu, Yi Chen. Synthesis of Carbon Nanowires using dc Pulsed Corona Discharge Plasma Reaction. *J Mater Sci*. 2004, **39**(1), 283–284.
- Ming-Wei Li, Zheng Hu, Xi-Zhang Wang, Quing Wu, Yi Chen. Low-temperature Synthesis of Carbon Nanotubes using Corona Discharge Plasma Reaction at Atmosphere Pressure. *J Mater Sci Lett*. 2003, **22**(17), 1223–1224.
- Salvermoser M., Murnick D.E. Efficient, Stable, Corona Discharge 172 nm Xenon Excimer Light Source. *J Appl Phys*. 2003, **94**(6), 3722–3731.
- Lo Shui-Yin, Lobo Julio D., Blumberg Seth, Dibble Theodore S., Zhang Hu, Tsao Chun-Cheng, Okumura Mitchio. Generation of Energetic He Atom Beams by a Pulsed Positive Corona Discharge. *J Appl Phys*. 1997, **81**(9), 5896–5905.
- Райзер Ю.П. *Физика газового разряда*. М.: Наука, 1992. 536 с.
- Верещагин И.П., Левитов В.И., Мирзабекян Г.З., Пашин М. *Основы электродинамики дисперсных систем*. М.: Энергия, 1974. 420 с.
- Токарев А.В. *Коронный разряд и его применение*. Бишкек: Издательство Кыргызско-Российского Славянского университета, 2009. 138 с.
- Самусенко А.В., Стишков Ю.К. *Электрофизические процессы в газах при воздействии сильных электрических полей*. Санкт-Петербург: Издательство СПбГУ, 2011. 583 с.
- Bologa A., Paur H.-R. Corona Discharge in Gaseous Phase – Study and Applications. *Abstracts of the 6th International Conference on Materials Science and Condensed Matter Physics*, 11–14 September 2012, Chisinau, Moldova, p. 258.14.
- Bologa A., Paur H.-R., Seifert H., Woletz K. Influence of Gas Composition, Temperature and Pressure on Corona Discharge Characteristics. *Int J Plasma Environmental Science & Technology*. 2011, **5**(2), 110–116.
- Bologa A., Paur H.-R., Seifert H., Woletz K. Study of the Corona Discharge in the Syngas at Various Gas Temperatures and Pressure. *Abstracts of the European Aerosol Conference*. 2–7 September, 2012, Granada, Spain. <http://www.eac2012.com/EAC2012Book/files/694.pdf>.
- Балданов Б.Б. Источник слабоионизированной неравновесной плазмы на основе импульсно-периодического режима отрицательного коронного разряда в потоке аргона. *Автореферат диссертации на соискание ученой степени канд. тех. наук*. ВСГУТУ. Улан-Удэ. 2004. 24 с.

17. Каральник В.Б. Численное моделирование нестационарных процессов в слаботочных газовых разрядах. *Автореферат диссертации на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук*. Троицк, 2007. 27 с.
18. Дандарон Г.-Н., Балданов Б.Б. Особенности зажигания отрицательной короны в потоке электроположительного газа. *Инженерная физика*. 2007, (3), 30–32.
19. Baldur Eliasson, Ulrich Kogelschatz. Modeling and Applications of Silent Discharge Plasmas. *IEEE Transactions on Plasma Science*. 1991, **19**(2), 309–323.
20. Шуайбов А.К. Об условиях контрагирования многоэлектродного коронного разряда на смесях He/Ar, Kr, Xe. *Письма в ЖТФ*. 1999, **25**(17), 90–94.
21. Седов Л.И. *Методы подобия и размерности в механике*. М.: Наука, 1977. 440 с.
22. Townsend J.S. *Die Ionisation der Gase. Handbuch der Radiologie*. Bd. 1. Stuttgart: Hirzel, 1920. 398 p.
23. Loeb L.B. *Fundamental Processes of Electrical Discharge in Gases*. Literary Licensing, LLC, 2013. 734 p.
24. Капцов Н.А. *Коронный разряд и его применение в электрофильтрах*. Москва-Ленинград: ОГИЗ. Госиздат технико-теоретической литературы, 1947. 226 с.

Поступила 24.10.13

Summary

A general system of equations of the corona discharge has been set up and reduced to the dimensionless form by using the methods of the theory of similarity. Criteria and conditions for the similarity of processes in the corona discharge are established. The formulas for the density of free space charges are obtained and the classic structure of the current-voltage characteristics for an arbitrary system of electrodes is confirmed by different methods: by using the theory of similarity, by analyzing self-similar solutions, by the approximation of the field distribution, and by averaging the equation for the current density with respect to the volume of the inter-electrode gap. It is shown that the quadratic dependence of the corona discharge current on the voltage between the electrodes is due to the linear dependence of the electric field intensity on the voltage applied on electrodes and linear threshold dependence of the density of free space carriers on voltage.

Keywords: corona discharge, helium, simulation, theory of similarity, current-voltage characteristics.